

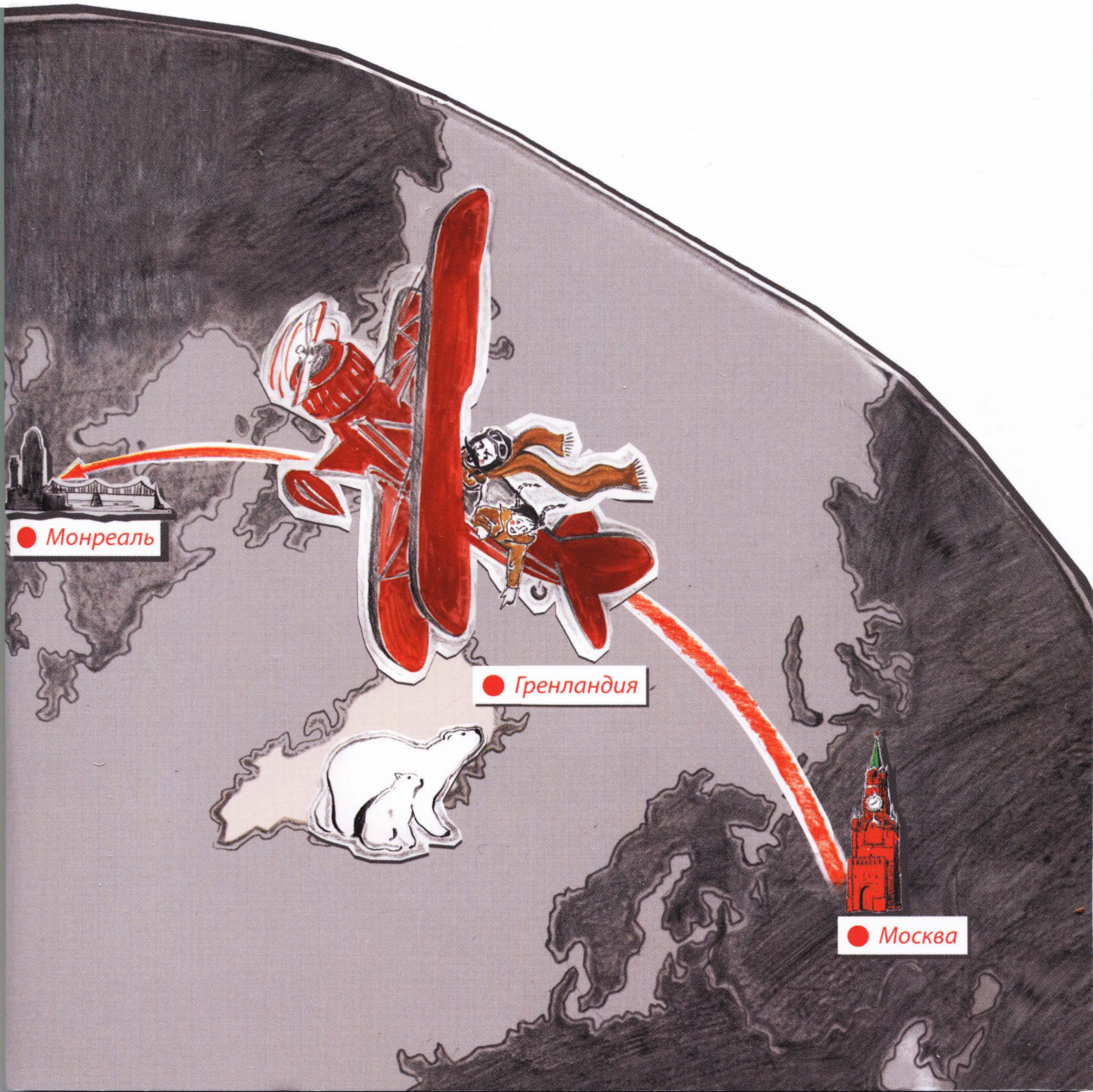
ISSN 0130-2221

2020 · №11-12

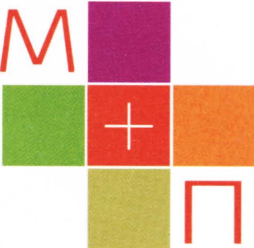
НОЯБРЬ-ДЕКАБРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

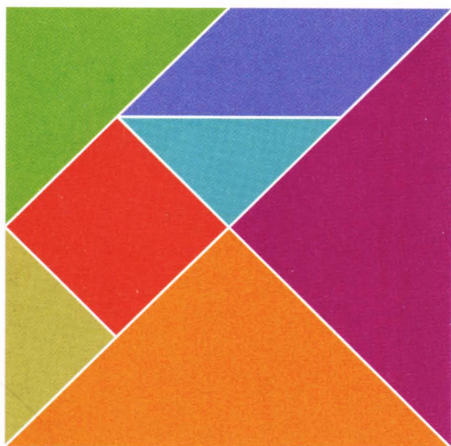


ТАНГРАМ

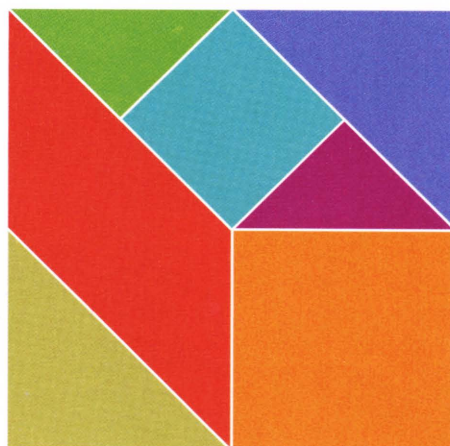


ПИФАГОР

«Танграм» и «Пифагор» – две очень известные геометрические головоломки. Каждая из них представляет собой квадрат, разрезанный на семь частей – квадраты поменьше, треугольники и параллелограммы. В «Танграме» пять треугольников и по одному квадрату и параллелограмму, в «Пифагоре» – четыре треугольника, два квадрата и один параллелограмм. К каждой из головоломок прилагается набор фигур, показанных только в виде силуэтов, а задача состоит в том, чтобы, используя все детали, собрать каждую из данных фигур.



Танграм



Пифагор

Но что если «скрестить» эти две классические головоломки? Возьмите, например, толстый картон, вырежьте из него два одинаковых квадрата и разрежьте каждый на части: один – по танграмной схеме, другой – по пифагоровой. Теперь наложите квадраты друг на друга и склейте между собой кусочки, имеющие один цвет на рисунке.

У вас получится двухслойный квадрат, собранный из семи «двухэтажных» деталей. Если теперь разобрать его на части и перемешать их, то собрать квадрат обратно будет не так-то просто. А если предварительно не красить части разрезаемых квадратов в разные цвета и сделать все детали одноцветными, то головоломка станет еще сложнее.

Желаем успеха!

О.Авилова

КВАНТ

НОЯБРЬ – 2020 № 11-12
ДЕКАБРЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, С.П.Новиков,
А.Л.Семенов, С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 «Вирус», «маска» – где гарантия? *А.Минеев*
8 Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре.
В.Протасов

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи M2626–M2633, F2633–F2640
16 Решения задач M2614–M2616, F2621–F2624
21 Об ортоцентрических четверках, связанных
с треугольником. *Чан Куанг Хюнг*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 24 Чертеж в геометрической задаче. *Г.Дорофеев,
Н.Розов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 30 Задачи 9–16

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физические парадоксы

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 Капля дождя. *Р.Коркин*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 38 Две задачи о покрытии доски уголками.
А.Канунников

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 41 Физико-математическая олимпиада «Физтех»

ИНФОРМАЦИЯ

- 48 Заочная физико-техническая школа при МФТИ

- 50 Ответы, указания, решения

- 62 Напечатано в 2020 году

Вниманию наших читателей (37,47)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация М.Кашина к статье В.Протасова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

«Вирус», «маска» — где гарантия?

А.МИНЕЕВ



Рис. 1. Слева — коронавирусы, в центре и справа — «рогатые» морские мины

ЭТА СТАТЬЯ — ПРО НЫНЕШНЮЮ эпидемию коронавируса, про то, нужно ли носить маски, дают ли они гарантию от заражения и так ли важна абсолютная защита от вируса. Но начнем с нескольких примеров из истории развития техники — с того, какие «маски» для защиты от каких «вирусов» там применяются.

Защита кораблей от магнитных мин

Посмотрите на рисунок 1. Не правда ли, сразу возникает странная зрительная аналогия между обликом коронавируса и «рогатой» морской миной. Проблема защиты кораблей от таких мин была очень острой в период до и во время второй мировой войны, хотя она сохраняет свою актуальность и сейчас.¹ Но особую опасность представляют *магнитные* мины.

В конструкцию больших морских кораблей всегда входят магнитные материалы, в первую очередь — ферромагнитная сталь.

¹ Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье И.Кикоина «Физики — фронту» («Квант», 1985, №5) и в статье В.Регеля, Б.Ткаченко «Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны» («Квант», 1980, №5). (Прим. ред.)

Намагничивание кораблей происходит как во время их стоянки (при постройке или в порту), так и в ходе движения, когда меняется положение корабля относительно магнитного поля Земли. Магнитные домены частично выстраиваются вдоль поля, и материал намагничивается. В этом случае опасность для надводных и подводных объектов представляют магнитные мины, реагирующие на возмущение магнитного поля при их движении. Это можно уподобить «вирусу» того времени.

Опасность сильно возросла из-за того, что после первой мировой войны Германия по Версальскому договору потеряла флот и целенаправленно развивала и совершенствовала программу создания и использования как контактных мин типа изображенных на рисунке 1, так и более опасных бесконтактных магнитных мин.

Магнитные мины, как показал опыт первых месяцев второй мировой войны, оказались весьма грозным оружием, сравнительно простым в установке (с самолетов, с кораблей и подводных лодок). Причем существенно более опасным, чем применение мин на суше против танков (сравните стоимость танка и военного корабля с экипажем). В поисках «масок» — средств защиты от этого «вируса» — в мире намечилось в то время несколько направлений:

- *полное размагничивание* корабля;
- *намагничивание* корабля *до максимальных значений*, с тем чтобы мины взрывались на безопасном расстоянии;

- *неполная компенсация магнитного поля* корабля – до уровня, когда мина перестает замечать корабль на фоне магнитного поля Земли.

Первое направление активно поддерживали флотские минеры, но в ходе реализации оно оказалось технически слишком сложным. В переводе на язык современной эпидемии COVID-19 это соответствует идеальной маске или появлению вакцины, гарантирующей безопасность.

Противоположного первому второго направления сначала (середина 1930-х годов) придерживалась Великобритания, однако на практике сильное намагничивание корабля не помогло полностью уберечь от магнитных мин. Опять переводя на язык COVID-19 – пусть все переболеют, а кто выживет, тому повезло.

В СССР еще до второй мировой войны защитой кораблей от магнитных мин занялся ленинградский Физико-технический институт (ЛФТИ), а в нем – группа сотрудников во главе с А. П. Александровым. Ими фактически с самого начала было выбрано третье направление: вместо решения задачи полной компенсации магнитного поля была поставлена задача существенного уменьшения магнитного поля корабля. До какого уровня?

Среднее значение индукции магнитного поля Земли на всей ее поверхности около $5 \cdot 10^{-5}$ тесла, у магнитных полюсов оно $6,6 \cdot 10^{-5}$ Тл, а на магнитном экваторе $3,4 \cdot 10^{-5}$ Тл. Естественное колебание магнитного поля Земли достигает уровня $(0,1-0,2) \cdot 10^{-5}$ Тл. Чувствительность мины не должна быть выше этой величины, иначе она подорвется безо всяких кораблей. Но это значит, что при компенсации магнитного поля корабля точности размагничивания на уровне $0,1 \cdot 10^{-5}$ Тл вполне достаточно для защиты от магнитных мин.

Решение такой задачи оказалось существенно проще, чем полная компенсация магнитного поля корабля. При этом еще

до начала компенсации измерялась карта магнитного поля, создаваемого кораблем.

Были предложены две схемы неполной компенсации: стационарная и нестационарная. По первой схеме (стационарной) на корабле размещалось несколько обмоток, по которым пропускался *постоянный* ток. При этом магнитное поле от обмоток было приблизительно равно по величине и противоположно по направлению магнитному полю корабля. По второй схеме (нестационарной) происходило динамическое размагничивание корабля. Обмотки, по которым пропускался *переменный* ток, размещались либо на самом корабле, либо рядом с кораблем (на специальном судне) и после размагничивания убирались. В ходе динамического размагничивания амплитуда магнитного поля постепенно уменьшалась от поля насыщения ферромагнетика до нуля. Такой эффект полного размагничивания был временным, и с течением времени намагничивание снова появлялось. Но при повторении процедуры размагничивания раз в несколько месяцев удавалось поддерживать магнитное поле корабля на низком уровне.

Таким образом можно было уменьшить магнитное поле корабля более чем в десять раз. Это спасло множество кораблей и подводных лодок. Созданная «система ЛФТИ» была внедрена примерно на сотне кораблей и действительно защитила их от немецких магнитных мин.

Интересная особенность данного примера дуэли «вируса» с «маской» касается действующих лиц этого противостояния. Размагничиванием кораблей («маска») в СССР наряду с А. П. Александровым активно занимался И. В. Курчатов. А разработкой и совершенствованием магнитных мин («вирус») в Германии – один из ведущих физиков В. Герлах. Впоследствии Курчатов стал руководителем советской атомной программы, а Герлах возглавил немецкий «Урановый проект». Так что их дуэль продолжилась не только на минном, но и на атомном направлении.

Казалось бы, необходимость в размагничивании кораблей для защиты от магнитных мин – очень давняя, почти забытая

история. Однако это не так, и в XXI веке на крупных военных кораблях размагничивание остается необходимым, причем используются те же, заложенные давно, принципы размагничивания. Только от медных кабелей обмоток размагничивания, потребляющих много энергии, постепенно переходят к кабелям на основе высокотемпературных сверхпроводников, охлажденных до криогенных температур (~ 70 К). Применение высокотемпературных сверхпроводников, одной из современных точек роста передовых технологий, позволяет существенно уменьшить массу обмоток и снизить мощность питания.

Стелс-технологии

Второй пример касается разработки конструкций самолетов, невидимых для систем обнаружения, что по идее могло бы превратить их в подобие абсолютного оружия (впоследствии эти подходы применялись и в других системах, в частности на подводных лодках). Слово *stealth* в переводе с английского означает скрытность.

В данном примере стелс-самолет уподобим «маске», гарантирующей неуязвимость со стороны радаров, а сами радары – «вирусу», пыгающемуся увидеть самолет и «ужалить» (привести в действие системы поражения). Но возможно ли создание абсолютной «маски» большого размера?

В методе обнаружения летящих объектов радаром сигнал от радиолокационной станции уходит в пространство и отражается. На радаре появляется изображение, позволяющее судить об эффективной площади рассеивания. Если обратное отражение радиоволн отсутствует, то объект невидим, эффективная площадь рассеивания равна нулю.

Стелс-технологии самолетов с малой эффективной площадью рассеивания первоначально оттачивались от двух принципов: нет отражения обратно, есть поглощение в материале корпуса. Более точно, нужно, чтобы радиоволны отражались от объекта так, чтобы обратно не вернуться, и поглощались в корпусе самолета. Это схематично изображено на рисунке 2. Ра-

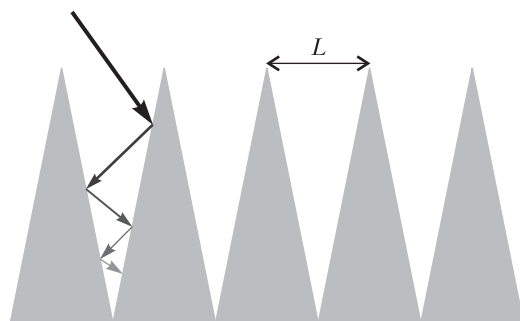


Рис. 2. Схема, поясняющая идею стелс-технологий

диосигнал (стрелка сверху) при распространении внутрь корпуса самолета отражается от элементов конструкции и поглощается в его материале. Обратный возврат сигнала отсутствует.

Казалось бы, измените конструкцию корпуса самолета, перейдя от гладкой, округлой формы к угловатой (опять что-то похожее на шипы коронавируса), и используйте поглощающие покрытия – проблема будет решена. Однако, реализация этих принципов в реальных конструкциях самолетов-«невидимок» послужила лишь толчком к быстрому развитию как систем обнаружения, так и стелс-технологий. При этом стоимость создания систем обнаружения оказалась во много раз меньше стоимости дальнейших шагов в сторону невидимости и неуязвимости. В создании систем обнаружения преуспела Россия, в развитии технологий невидимости – США.

На рисунке 2 показано характерное расстояние L между ребрами. Если длина волны радиосигнала λ меньше L , то изложенный принцип невидимости объекта должен работать. Первые стелс-самолеты в США создавались в расчете на сантиметровые длины волн радиолокационных станций, работающих на частоте $f \sim 10$ ГГц. Поскольку $\lambda = c/f$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света), то при указанной частоте длина волны $\lambda \sim 3$ см. Но если выбрать длину волны $\lambda \gg L$, то сигнал перестает замечать ребра и отражается. И действительно, переход на меньшие частоты и, соответственно, на большие длины волн (дециметровый диапазон) привел к тому, что самолет-«невидимка» стал заметен для

таких радиолокационных станций. А если двинуться еще дальше и перейти уже к метровому диапазону волн, т.е. длин волн того же масштаба, что и размер элементов самолета, то малозаметность самолета становится в принципе невозможной. То же относится и к поглощению радиоволн. Для радиоволн с разной длиной волны эффективность их поглощения различна.

Что в итоге? Развитие технологий малозаметности привело к тому, что они стали важным элементом для новых поколений самолетов, ракет и подводных лодок, однако не решают проблему абсолютной защиты. Но прогресс в движении к малозаметности огромен. На самолетах нового поколения принимаются меры по снижению заметности как в радиодиапазоне, так и в видимом, инфракрасном и звуковом диапазонах. В результате эффективная площадь рассеивания для большого дозвукового стратегического бомбардировщика (без стелс-технологий) оказывается порядка 100 м^2 , истребителя – порядка 10 м^2 , а для современных стелс-самолетов – еще на порядок меньше. Но при этом оказалось, что малозаметные самолеты существенно менее маневренные и менее скоростные. В итоге соперничество между сверхманевренностью и малозаметностью при бурном развитии средств радиолокации продолжается.

Любопытно, что введенное выше понятие эффективной площади рассеивания можно уподобить понятию сечения взаимодействия в физике, по которому судят о параметрах элементарных частиц и характере взаимодействующих полей. При этом сечение одного и того же объекта, скажем протона, в случае взаимодействия с разными частицами может сильно различаться. Пример того, как может выглядеть протон при его взаимодействии с другим протоном, с квантом излучения (фотоном) и с легкой элементарной частицей (нейтрино), приведен на рисунке 3. Как видно из рисунка, в случае рассеяния фотона на протоне могут быть «видны» три кварка, из которых «состоит» протон. Еще четче это видно при рассеянии слабо взаимодействующего нейтрино с протоном. Как и в

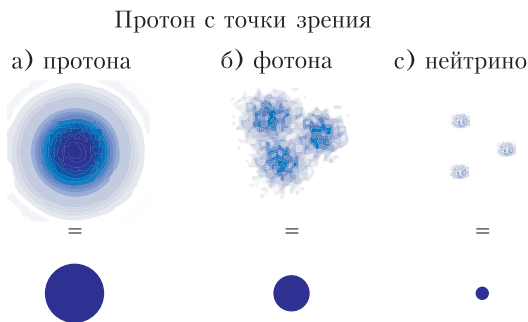


Рис. 3. Эффективное сечение. Мишень во всех трех случаях – протон. Налетающая частица – протон; фотон; нейтрино. В нижнем ряду показано отличие в эффективном сечении взаимодействия

случае отражения от самолета радиоволн различного диапазона, сечения взаимодействия могут сильно различаться.

В приведенном сравнении мы чуть коснулись современной модели строения элементарных частиц – так называемой Стандартной модели.² Немного продолжив аналогии, упомянем о современных «элементарных частицах» или «элементах структуры» применительно к проблеме малозаметности в самолетостроении. Это еще одна точка роста в развитии технологий. Речь идет о *метаматериалах* и особом языке их описания.

В отличие от множества полей взаимодействия элементарных частиц в Стандартной модели – сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное – в науке о метаматериалах действует только электромагнитное поле. А вместо набора истинно элементарных частиц Стандартной модели – кварков, лептонов, калибровочных бозонов и бозона Хиггса – используется набор простых электромагнитных резонаторов. Примеры элементарных «кирпичиков», из которых строятся метаматериалы, приведены на рисунке 4. В результате метаматериал является набором макроскопических элементов из этих «кирпичиков» (и даже более сложных), которые уложены в периодическую структуру, где связу-

² Подробнее о ней можно прочитать, например, в статье В.Рубакова «К открытию бозона Хиггса» («Квант», 2012, № 5–6).

Кусок проволоки		
 Разрезанное кольцо	 Нагруженное кольцо	 Двойное разрезанное кольцо
 Ω -включение	 Спираль	 Бифилярная спираль
 Сегнето-электрический куб	 Сегнето-электрический шар	 Сегнето-электрический рулет

Рис. 4. Элементы, из которых строятся метаматериалы



Рис. 5. Структура из метаматериала, включающая комбинации отрезков прямых проволочек и двойных разрезанных колец в диэлектрике

ющим элементом является диэлектрик. Одна из таких структур показана на рисунке 5. Смысл термина «мета» – за пределами – в том, что электромагнитные свойства получающейся структуры радикально отличаются от свойств отдельных элементов.

На рисунке 4 упомянут термин «сегнетоэлектричество». Это явление имеет аналогию с ферромагнетизмом из раздела о размагничивании. При воздействии на железо магнитным полем домены ориентируются вдоль магнитного поля, и мате-

риал намагничивается. Аналогично, воздействие электрического поля на сегнетоэлектрик также приводит к ориентации доменов сегнетоэлектрика, которая сохраняется после снятия электрического поля, и материал электризуется.

Использование метаматериалов применительно к проблеме малозаметности самолетов бурно развивается, обещая множество прорывов. В указанных структурах электромагнитные волны распространяются по необычным траекториям, затрудняющим как обнаружение объектов, так и их свойства. Однако на этом пути еще много проблем (невидимость в широком диапазоне частот, сохранение свойств метаматериалов в реальных конструкциях самолетов при большой скорости полета и др.). Кроме того, весь корпус самолета метаматериалами не покрыть. Самолет сложно сделать полностью невидимым, однако можно довольно сильно уменьшить эффективную площадь рассеивания и затруднить его обнаружение радарными.

Коронавирус и защитная маска

Мы переходим к основному разделу этой статьи. Главный вывод из предыдущих разделов – абсолютной защиты в технике пока не удалось создать, но удается сильно замаскировать объект и затруднить его обнаружение.

В качестве одной из основных и простых мер защиты от нынешней эпидемии коронавируса предлагается повсеместное ношение масок (плюс соблюдение дистанции, плюс более частое мытье рук и т.д.). При этом сразу оговаривается, что маски не гарантируют от заражения. И все же, чуть перефразируя американскую поговорку, отметим, что «доброе слово, подкрепленное цифрой, порой звучит убедительнее, чем просто доброе слово».

Есть два основных пути заражения: воздушно-капельный (при кашле и чихании) и контактный (прикосновения руками к поверхностям, содержащим вирусы). В первом случае вирусы попадают непосредственно на слизистые носа, глаз и рта, во втором возможно их касание грязными «вирусными» руками. Приведем несколь-

ко цифр, относящихся к вирусам. Они не точные, но могут дать представление о процессах при заражении вирусом. Будем во многом опираться на данные американского иммунолога и популяризатора науки Эрина Бромиджа, но с проверкой этих данных по другим источникам. Заметим, что оценки скорости оседания капель, содержащих вирусы, были приведены в статье А.Стасенко «Не чихать: пандемия!» («Квант», 2020, № 4).

Инфекционная доза, при которой человек заболевает, – около 1000 частиц вируса. Эта цифра очень приблизительна. Она зависит от состояния здоровья человека, его иммунного статуса, возраста и т.д. Но важно отметить, что в случае COVID-19 приводят к заражению не единичные вирусы, а их большое количество, полученное за короткий период времени. С единичными вирусами иммунная система организма чаще всего может справиться.

Кашель сопровождается выбросом нескольких тысяч мелких капель, содержащих вирусы, из которых те, что побольше, падают на землю, а самые мелкие зависают в воздухе. При *чихании* в воздух выделяется уже десятки тысяч еще более мелких капель. Общее число вирусов, выделяемых (по Бромиджу) при кашле или чихании, оценивается в сотни миллионов. При *дыхании*, особенно спокойном, через нос выделяется существенно меньшее количество вирусных капель, Бромидж приводит цифру в несколько десятков вирусных частиц в минуту. Если все эти частицы попадают на незараженного человека, то инфекционная доза накапливается в течение примерно часа нахождения вблизи зараженного человека. *Разговор* больного увеличивает количество выделяемых капель примерно на порядок.

В целом, наиболее опасными для распространения коронавируса являются чихание и кашель. В этом случае использование масок как заболевшими, так и здоровыми, может радикально изменить ситуацию. Некоторую пищу для размышлений о пользе масок дает таблица (рис.6), построенная по опубликованным предварительным результатам работы финских ис-

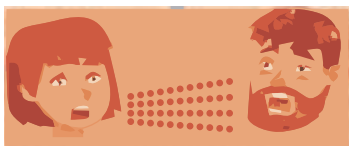



90 %	
30 %	
5 %	
1,5%	

Рис. 6. Риск передачи коронавируса при использовании масок

следователей. Как следует из таблицы, маска задерживает капли, содержащие вирусы, и позволяет существенно снизить опасность заражения. Эффективность использования масок возрастает, если их носят как зараженный, так и здоровый человек. Еще лучше показатели в случае, когда люди в масках находятся на расстоянии друг от друга (риск близок к нулю при расстоянии более 1,5–2 м).

Отметим важную особенность картинок из таблицы: на здоровом человеке кроме маски есть еще и очки. Ведь слизистые глаз являются одним из важных каналов проникновения вируса. Хуже того: вирус, попав в глаза, очень долго сохраняется. Это подтверждается и данными китайских ученых: по их оценкам люди, регулярно носящие очки, в пять раз реже заражаются коронавирусом.

Так что гарантии, как и в предыдущих случаях, нет, но «эффективную площадь заражения» при использовании масок в людных местах все же можно сильно уменьшить.

Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре

В.ПРОТАСОВ

*Управляя каждым шагом,
Повели меня, погнавши
Фантастическим зигзагом
По неведомой спирали.*

М.Щербаков. Аллилуйя

Геодезические линии

Почему самолет из Москвы в Монреаль летит через Гренландию? Москва находится на 56-й широте, Монреаль – на 45-й, а вся Гренландия – севернее 60-й. Почему самолет туда залетел? А потому, что маршрут стараются проложить по кратчайшему пути по поверхности Земли. А он, как это ни странно, проходит через Гренландию. Часто это противоречит нашей географической интуиции. Кратчайший путь из Екатеринбурга в Лос-Анджелес и вовсе проходит через Северный полюс.

Кратчайший путь по заданной поверхности идет вдоль *геодезической линии*. Само слово «геодезическая» происходит от науки геодезии, буквально по-гречески $\gamma\epsilon\omicron\delta\alpha\iota\sigma\iota\alpha$ – «деление земли». И если на плоскости геодезические – это прямые, то нахождение геодезических на других поверхностях порой весьма сложно. Величайший математик Леонард Эйлер (1707–1783) в 1732 году вывел общее уравнение геодезических линий. Позже они преобразились в уравнения Эйлера–Лагранжа и стали главным инструментом не только при построении геодезических на поверхностях, но и в других экстремальных задачах. Главным приложением геодезических в то время была картография (отсюда и название). Расстояние между двумя пунктами на карте нужно всегда измерять по геодезической, причем делать это с учетом

рельефа местности. Потом геодезические стали применять для построения внутренней геометрии произвольной поверхности, где за расстояние между точками естественно брать кратчайшее расстояние по поверхности. Следует, однако, отличать геодезические линии от кратчайших!

Что такое «геодезическая»? *Геодезической на поверхности называется линия, локально кратчайшая в каждой своей точке.*

Это значит, что для любой точки M , лежащей на линии, верно следующее: какие ни взять на линии точки A и B , достаточно близкие к M , дуга геодезической AB является кратчайшим путем по поверхности между A и B . Математик сформулирует локально-кратчайшее свойство так: *для любых двух точек, лежащих в некоторой окрестности точки M , дуга геодезической является кратчайшим путем по поверхности между ними.* Заметим, что кратчайший путь между любыми двумя точками является геодезической линией, но обратное верно не всегда. Красная линия на рисунке 1 – геодезическая, хотя кратчайший путь из точки A в точку C по этой линии не проходит – есть короче. Но для

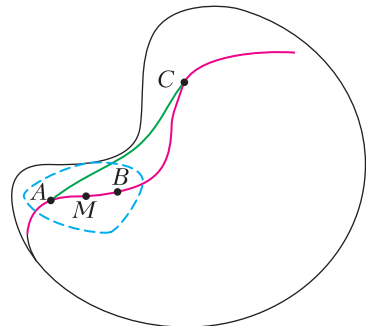


Рис. 1. Геодезическая – локально кратчайшая линия

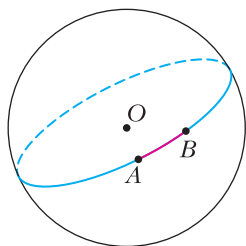


Рис. 2. Геодезические на сфере

точек, близких к M , все будет хорошо: кратчайший путь будет проходить по геодезической (как между точками A и B на рисунке 1).

Например, две близкие точки на сфере соединяются двумя

дугами большого круга – длинной синей и короткой красной (рис.2). Короткая – это кратчайший путь из A в B по сфере. Но и короткая, и длинная – обе – являются геодезическими.

Геодезические нужны не только для нахождения кратчайших путей на поверхностях. Именно этим линиям, согласно принципу наименьшего действия Гамильтона, соответствует движение любой механической системы в фазовом пространстве. Любая частица, вынужденная двигаться по поверхности, при этом не подверженная никаким силам, движется вдоль геодезической. В теории относительности движение также происходит по геодезической пространства-времени. Такое же представление имеет теория калибровочных полей.

Все геодезические на плоскости – прямые. На боковой поверхности цилиндра или конуса геодезические построить очень просто – с помощью развертки на плоскость. Геодезические – ровно те линии, которые «распрямляются» при развертке

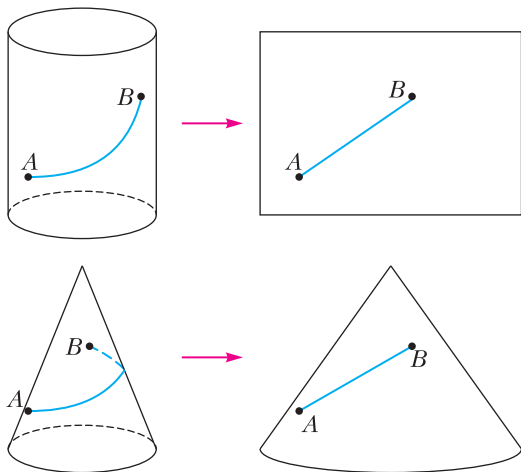


Рис. 3. Геодезические на цилиндре и на конусе

(рис.3). У сферы, увы, никакой кусок на плоскость не разворачивается. Но геодезические найти легко. Это – дуги *больших кругов*, т.е. окружностей, получающихся в сечении сферы плоскостями, проходящими через центр. (Будьте внимательны: большой круг – это не круг, а окружность!)

Факт. Все геодезические на сфере – дуги больших кругов.

Доказывается это так же, как и для прямых на плоскости. Сначала надо доказать неравенство треугольника для сферы. Рассмотрим произвольный сферический треугольник, стороны которого – дуги больших кругов. Поскольку длина дуги большого круга пропорциональна углу между радиусами-векторами, будем мерить длины дуг в градусах. Итак:

Неравенство треугольника на сфере.

Если все стороны сферического треугольника меньше 180° , то для него выполнено неравенство треугольника.

Доказать это можно так же, как обычное неравенство треугольника на плоскости, – с помощью проекции одной из вершин треугольника на плоскость, содержащую противоположную сторону. Теперь, с помощью неравенства треугольника, доказываем, что любая ломаная на сфере короче дуги, соединяющей концы ломаной. То же, конечно, верно и для любой кривой на сфере. А значит, дуга большого круга (меньшая из двух дуг) является кратчайшим путем между ее концами.

Заметим, что дугами больших кругов являются на сфере не только кратчайшие пути, но и все геодезические линии. Любые две точки на сфере, кроме диаметрально противоположных, соединяют ровно две геодезических. А вся большая окружность – замкнутая геодезическая. Именно с замкнутыми геодезическими нам и предстоит иметь дело.

Три геодезические Пуанкаре. Когда ошибаются гении

Замкнутые несамопересекающиеся геодезические представляют для исследователей особый интерес. Им соответствует периодическое движение механической сис-

темы. Есть у замкнутых геодезических и многочисленные геометрические приложения. Мы всегда будем искать только геодезические без самопересечений, и будем в большинстве случаев опускать это длинное слово «несамопересекающаяся».

Поверхность будем всегда предполагать ограниченной и выпуклой. Последнее оз-

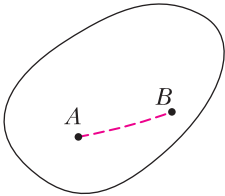


Рис. 4. Выпуклая поверхность

начает, что ограниченное ею множество выпукло: вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок между ними (рис. 4). Для выпуклых поверхностей геодезическую можно

представить наглядно: это натянутое на поверхность тонкое резиновое колечко, которое не сползает.

Кроме выпуклости бывает и еще одно предположение – гладкость. Математик скажет, что уравнение, задающее поверхность, имеет вторую непрерывную производную. Для нас будет достаточно такого описания: поверхность не имеет пиков и выступов. Она в самом деле «гладкая», похожая на морскую гальку. Шар и эллипсоид – гладкие поверхности, а многогранник – нет. Для гладких поверхностей верен принцип «локальной единственности» геодезической.

Факт. *Две близкие точки на гладкой поверхности можно соединить единственной геодезической линией.*

Заметим: не только кратчайшая линия локально единственна, но и геодезическая тоже (в этом случае, она, конечно, и будет кратчайшей). «Две близкие точки» – это значит, что существует такое число r , что между любыми двумя точками на расстоянии не более r есть ровно одна геодезическая. Этот факт сослужит нам хорошую службу и поможет в доказательствах.

В 1905 году великий французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912) выдвинул гипотезу о том, что на любой гладкой выпуклой поверхности есть как минимум три замкнутые геодезические. Почему именно три, а не больше? Потому что на эллипсоиде, у которого длины всех осей

различны, таких геодезических три – это три его «экватора», т.е. три сечения эллипсоида координатными плоскостями. Напомним (хотя читатель, конечно, это знает), что эллипсоид – это шар, сжатый в трех перпендикулярных направлениях. Его можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

где a, b, c – положительные числа. Если $y = z = 0$, то $x = a$ или $x = -a$. Таким образом, ось OX пересекает эллипсоид по отрезку длины $2a$ – это ось эллипсоида. Всего у эллипсоида три оси, их половины – полуоси, длины полуосей – это a, b и c . Полуоси пересекают поверхность в полюсах, а координатные плоскости – по экваторам.

Экваторы – это геодезические. *Каждый экватор эллипсоида является замкнутой геодезической.*

В самом деле, возьмем на экваторе две близкие точки M и N . Если кратчайший путь между ними по поверхности эллипсоида не совпадает с дугой MN экватора, то отразим этот путь относительно плоскости экватора. Получим другой путь, тоже кратчайший. Это противоречит единственности.

Итак, разноосный эллипсоид (у которого длины полуосей различны) имеет три замкнутые геодезические – линии экваторов. Пуанкаре предположил, что любое гладкое выпуклое тело будет «не хуже» эллипсоида и тоже будет иметь не меньше трех замкнутых геодезических. Может и больше – шар имеет их бесконечно много. Но три – обязательно! Сам же Пуанкаре доказал свою гипотезу, правда в очень частном случае – для аналитических поверхностей, близких к эллипсоиду. А в общем виде эта проблема долго оставалась нерешенной. Занимались ею многие видные ученые. Крупнейший математик XX века Давид Гильберт (1862–1943) писал об этой задаче в своей книге «Наглядная геометрия», созданной в соавторстве с С.Э.Кон-Фоссеном. Ею занимался один из основателей общей топологии Павел Самуилович Урысон (1898–1924). В 1930 году гипотеза Пуанкаре, наконец,

была доказана. Это сделали советские математики Лазарь Аронович Люстерник (1899–1981) и Лев Генрихович Шнирельман (1905–1938), причем для этого они разработали новую теорию топологических методов в вариационных задачах. Ну а гораздо позже, в 1992 году, американские математики Дж.Фрэнкс и В.Бангерт доказали, что на самом деле на любой гладкой выпуклой поверхности существует не три, а бесконечно много замкнутых геодезических.

Стоп, стоп! Как бесконечно много? Мы же знаем, что на эллипсоиде их три! Нет, тут что-то не так. Открываем «Наглядную геометрию» Гильберта и Кон-Фоссена, читаем: «Так можно показать, что на трехосном эллипсоиде единственными замкнутыми геодезическими линиями без самопересечений являются те три эллипса, которые получаются в пересечении этой поверхности с тремя плоскостями симметрии».

Значит, «можно показать». Но авторы не пишут, как именно. Не стали ли они жертвами самообмана, как П.Ферма, которому «не хватило места» на полях книги для доказательства своей Великой теоремы? Ведь согласно теореме Фрэнкса-Бангерта, геодезических бесконечно много на *любой* гладкой выпуклой поверхности, значит, и на эллипсоиде тоже.

Выходит, Гильберт и Кон-Фоссен ошибались? И Пуанкаре, не ставивший под сомнение, что на разноосном эллипсоиде их ровно три? И Урысон, и Люстерник, и Шнирельман – все они ошибались? Да! Более того, все они прошли мимо элементарного примера «четвертой» геодезической на эллипсоиде. Пример этот появился в 1982 году в книге В.Клингенберга «Riemannian geometry», а потом еще многократно переоткрывался.¹

Четвертая геодезическая на эллипсоиде. Пример этот настолько наглядный и замечательный, что его можно разбирать

¹ Например, его в 2004 году независимо придумал российский математик С.С.Анисов, который и сообщил его автору. Лишь значительно позже мы узнали, что такой же пример содержится в книге Клингенберга.

на уроках в школе. Все видели, как перевязывают коробки с конфетами: пускают часть ленты вниз, по дну коробки, затем ведут наверх, по крышке, затем опять спускают вниз и затем опять наверх. Получается линия из четырех частей – две противоположные части внизу и две наверху (рис. 5). А теперь надо сделать

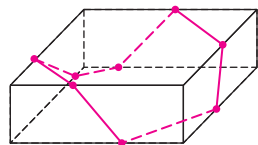


Рис. 5. Перевязочная лента

то же, но не на прямоугольной коробке, а на круглой. Сейчас мы построим эту линию на эллипсоиде.

Возьмем эллипсоид, у которого одна ось сильно меньше двух других. Почти плоский. Обозначим концы длинных полуосей (в порядке следования) A, B, C, D . Соединим A и B кратчайшей линией, идущей по поверхности эллипсоида. Так как эллипсоид почти плоский, эта линия будет близка к отрезку AB и уж точно не будет идти по экватору, потому что длина дуги экватора больше отрезка AB . Теперь проведем такую же дугу AD по другой (нижней) стороне эллипсоида. Иначе говоря, дуга AD переходит в дугу AB при повороте на 180° относительно оси AC . Далее пустим такую же дугу DC по верхней стороне и закончим дугой CB с нижней стороны.

Мы получили замкнутую линию, состоящую из четырех равных дуг (рис.6). Оказывается, она будет геодезической.

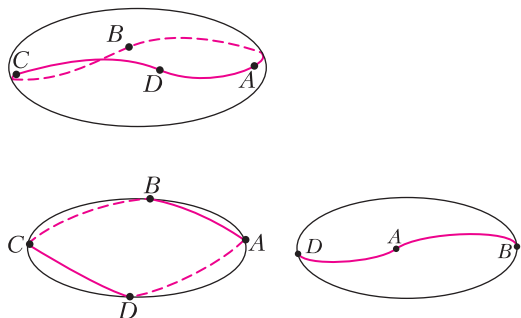


Рис. 6. «Четвертая» геодезическая на эллипсоиде

Теорема 1. Построенная замкнутая линия $ABCD$ является геодезической на поверхности эллипсоида.

Доказательство. В каждой внутренней точке дуги AB линия является локально-

кратчайшей. Если нет, просто заменим ее маленький кусочек на более короткий и получим более короткий путь из A в B , что невозможно. Так же – с тремя другими дугами. Таким образом, во внутренних точках дуг все хорошо. Проблема возникает на концах дуг. Почему, скажем, в точке A наша линия локально кратчайшая? Возьмем рядом с A две точки M и N на разных дугах. Почему путь MN вдоль линии является кратчайшим на эллипсоиде? Из построения этого не следует.

Предположим, что дуга AM длиннее дуги AN . Тогда возьмем на продолжении дуги AN за точку N точку M' , для которой дуга AM' равна дуге AM (рис.7,а). Ясно,

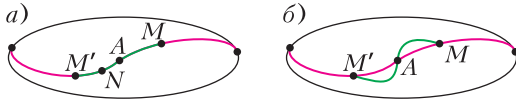


Рис. 7

что M и M' переходят друг в друга при повороте на 180° относительно оси AC . Если дуги AM и AN равны, то просто обозначим $M' = N$. Теперь предположим обратное: есть более короткий путь на поверхности эллипсоида между точками M и N . Добавив к этому пути дугу NM' , получаем более короткий путь по поверхности между M и M' . Значит, кратчайший путь между M и M' не совпадает с дугой нашей линии MM' . Сделаем поворот на 180° относительно оси AC . Точки M и M' поменяются местами, а кратчайший путь между ними должен перейти в себя – ведь он единственный! Обозначим через P середину этого кратчайшего пути (расстояния меряются вдоль пути). Поворот на 180° относительно оси AC оставляет эту точку на месте. Но тогда она лежит на оси вращения – прямой AC . А поскольку она находится на поверхности эллипсоида, она совпадает либо с A , либо с C . До точки C слишком далеко, кратчайший путь туда не заходит. Значит, $P = A$. Итак, середина кратчайшего пути из M в M' находится в точке A (рис.7,б). Значит, кратчайший путь из A в M идет по нашей линии. Иначе, поставим его вместо дуги AM и тем самым уменьшим длину дуги AB , что невозможно. Значит, и кратчайший путь из M в M'

идет по нашей линии, что противоречит предположению. Теперь все доказано.

Ну вот, а обещали совсем элементарный пример... А он потребовал довольно тонкого рассуждения. Да, но это – для доказательства. А построение этого примера действительно очень просто. Если учитель младших классов даст ребятам подобный плоский эллипсоид и попросит натянуть на него резиновое колечко иначе, чем вдоль одного из трех экваторов, они несомненно справятся. Зацепить петлей сверху, продеть внизу, затем – другой петлей сверху. Тем удивительнее, что многие десятилетия никто не додумался до этого примера. И никто, включая крупнейших математиков XX века – Пуанкаре и Гильберта, не допустил мысли, что на эллипсоиде может быть четвертая геодезическая. Чудеса случаются!

На самом деле это – не единственный пример «неправильной» геодезической на эллипсоиде. Есть еще. В упражнении 5 мы предлагаем вам их построить. А нас ждут многогранники!

Упражнения

1. Поверхность горы имеет форму конуса, разверткой которого является треть круга радиуса 1 км. Два селения находятся у подножия горы, с противоположных сторон основания. Чему равна длина самого короткого пути между ними?
2. Из одного из селений из предыдущей задачи вышел путник, желающий обойти гору и вернуться в селение. Какова длина самого короткого маршрута? Будет ли этот маршрут замкнутой геодезической?
3. На прямом круговом цилиндре есть две очевидные замкнутые геодезические: «пояс» (окружность, параллельная основанию) и «ручка» (прямоугольник, содержащий два параллельных диаметра). А могут быть другие?
4. Образующая конуса вдвое больше радиуса основания. Постройте замкнутую геодезическую на его поверхности. Чему равна ее длина, если радиус основания равен 1?
5. Рассмотрим эллипсоид, у которого одна полюсь маленькая, а две другие равны. Постройте на нем несколько новых типов замкнутых геодезических.

Указание. Геодезическую из теоремы 1 можно назвать «четырёхугольной», поскольку она состоит из четырех частей. Постройте «шестиугольную», «восьмиугольную» и тому подобные геодезические.

(Продолжение следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2630–M2632, M2633а предлагались на XLII Турнире городов.

Автор задач Ф2633–Ф2640 – А.Власов.

Задачи M2626–M2633, Ф2633–Ф2640

M2626. На межгалактическую олимпиаду съехалось бесконечное количество участников, которых зарегистрировали под номерами 1, 2, 3, ... Оказалось, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ участник с номером n имеет не менее n друзей среди оставшихся участников (дружба взаимна). Имеется гостиница для проживания участников с бесконечным количеством двухместных номеров. Докажите, что участников можно расселить в двухместные номера так, чтобы в каждом номере оказалась пара друзей.

В.Брагин, П.Кожевников

M2627. Дана бесконечная арифметическая прогрессия. Рассматриваются произведения пар ее членов. Докажите, что произведения в каких-то двух различных парах отличаются не более чем на 1.

А.Кузнецов

M2628*. Имеется N внешне одинаковых чашечных весов. Известно, что ровно одни из них испорченные – они показывают что угодно, и их вес отличается от веса остальных, которые весят одинаково и всегда показывают верный результат. За одно взвешивание можно положить несколько весов на каждую из чаш каких-то других весов. При каком наибольшем N за три взвешивания можно гарантированно найти испорченные веса?

А.Грибалко, О.Манжина

M2629*. На рисунке 1 в центре изображен произвольный (зеленый) треугольник. На его сторонах во внешнюю сторону построили белые квадраты. Некоторые из их вершин соединили отрезками, на них снова построили во внешнюю сторону белые квадраты и т.д. В промежутках между квадратами образовались треугольники и четырехугольники, которые окрасили в различные цвета. Докажите, что

- все окрашенные четырехугольники являются трапециями;
- площади всех многоугольников одного и того же цвета равны;
- отношения оснований одноцветных трапеций равны;
- если $S_0 = 1$ – площадь исходного треугольника, а S_i – площадь цветного многоугольника в i -м слое, то $S_1 = 1$, $S_2 = 5$, а для

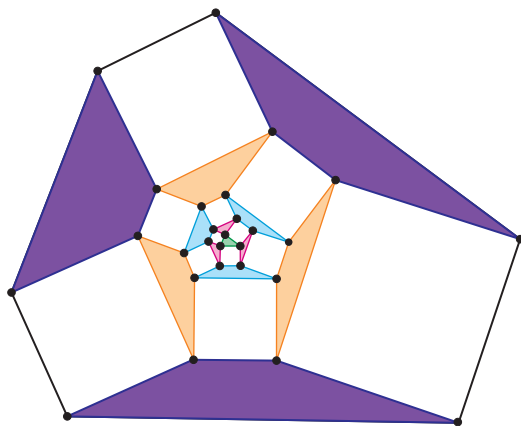


Рис. 1

$n \geq 3$ выполняется равенство $S_n = 5S_{n-1} - S_{n-2}$.

Ф. Нилов

M2630. Назовем пару различных натуральных чисел удачной, если их среднее арифметическое и среднее геометрическое – натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдется другая удачная пара с тем же средним арифметическим?

Б. Френкин

M2631. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трех его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что а) один из углов этого четырехугольника не больше 60° ; б) один из углов этого четырехугольника не меньше 120° .

М. Дидин

M2632. Петя и Вася по очереди пишут на доске дроби вида $1/n$, где n – натуральное. Начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход – одну, за второй ход – две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?

А. Аржанцев

M2633. За каждым из k круглых столов сидит по $n \geq 2$ гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столу слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить всех гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить между собой kn пар гномов (гномы в паре могут быть как от одного стола, так и от разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих kn пар. Выясните, при каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник, если а) $k = 2$; б*) $k \geq 2$ – данное натуральное число.

М. Святловский

Ф2633*. Математический маятник установлен на вращающейся горизонтальной

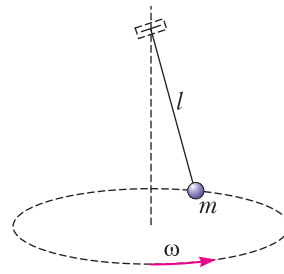


Рис. 2

ной платформе (рис.2). Подвес маятника выполнен из тонкого и очень легкого стержня длиной l , диаметр шарика намного меньше длины подвеса, а его масса равна m . Точка подвеса находится на вертикальной оси вращения платформы и выполнена в виде цилиндрического шарнира. Определите период малых колебаний маятника в широком интервале угловых скоростей вращения платформы, а также верхнюю границу интервала малых угловых скоростей.

Ф2634. Тонкое упругое кольцо удерживают на поверхности усеченного конуса так, как это показано на рисунке 3. В недеформированном состоянии внутренний радиус

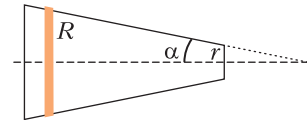


Рис. 3

кольца равен малому радиусу конуса. Кольцо освобождают. Определите время соскальзывания кольца с конуса. Масса кольца m , коэффициент упругости единицы длины кольца k , угол при вершине конуса α , коэффициент трения между поверхностями кольца и конуса $\mu < \text{tg } \alpha$. Гравитацией пренебречь.

Ф2635. Цилиндрический бак содержит жидкость и газ (рис.4). В некоторый момент времени кран, закрывающий сливное отверстие в дне бака, открывается и сжатый газ «выдавливает» жидкость из бака. Такой процесс возможен во многих практических ситуациях: от продувки балластных емкостей на подводных лод-

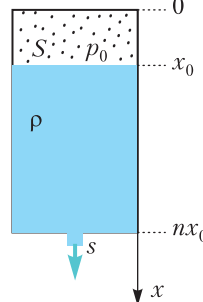


Рис. 4

ках до сброса резервного топлива на самолетах. За какое время произойдет освобождение бака от жидкости? Как изменится это время, если начальное давление газа увеличить в 4 раза? Считайте известными следующие величины: $\alpha = S/s$ – отношение площадей сечения бака и сливной отверстия, p_0 – начальное давление газа, x_0 – начальная высота газового столба, n – вертикальный размер бака в единицах x_0 , ρ – плотность жидкости. Расширение газа считайте изотермическим, а внешнее давление примите равным нулю. Вязкостью жидкости и гравитацией пренебречь, бак закреплен.

Ф2636*. Ученик, который успешно перешел в 11 класс, летом на даче развлекался следующим образом. Он из большой бочки и других подручных материалов изготовил необычный термометр. Схема этого простого изобретения представлена на рисунке 5. В герметичной бочке находится вода. Высота столбика воды в прозрачной трубке зависит от температуры. Определите чувствительность такого термометра в диапазоне летних и осенних температур 10–40 градусов Цельсия. Внутренний диаметр трубки значительно меньше внутреннего диаметра бочки. При решении задачи вам не обойтись без таблицы зависимости давления насыщенных паров воды от температуры:

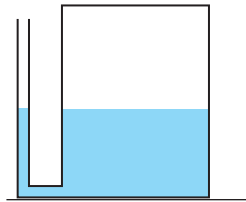


Рис. 5

Ф2637. На рисунке 6 показана схема простейшего теплообменника. В теплоизолированном баке находится теплоноситель при высокой температуре. Через бак проходит длинная и тонкая трубка-змеевик, сделанная из металла с высокой теплопроводностью. Определите конечную температуру первоначально холодной жидкости (напитка), протекшей через змеевик теплообменника. В рабочем режиме скорость про-

текания и массу жидкости в змеевике считайте малыми. Известны следующие величины: M, T_0 – масса и начальная температура теплоносителя, m, t_0 – соответственно масса и начальная температура нагреваемой жидкости (напитка). Теплоемкости жидкостей считайте равными, потерями тепла можно пренебречь. Как изменится результат, если «поменять местами» жидкости – нагреваемую жидкость налить в бак, а через змеевик проливать теплоноситель?

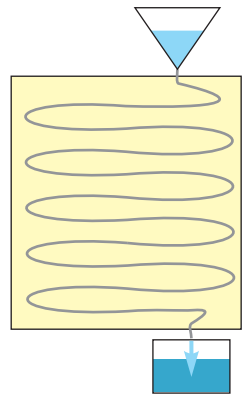


Рис. 6

Ф2638. Из материала с удельным сопротивлением ρ изготовлена тонкостенная сфера радиусом A (рис.7). Толщина стенок

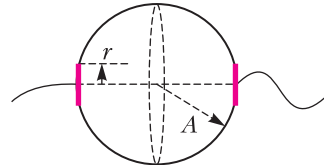


Рис. 7

сферы $d = \beta A, \beta \ll 1$. Небольшие области полюсов сферы (контактные области) изготовлены из сверхпроводника, их приближенно можно считать дисками радиуса r . Определите сопротивление сферы между контактными областями. Каким станет это сопротивление, если все геометрические размеры сферы увеличить в n раз?

Ф2639. Металлический стержень подвешен горизонтально на двух параллельных нитях (рис.8). Такая конструкция представляет собой гравитационный маятник, который имеет три степени свободы и соответственно может совершать три разных собственных колебаний. Очевидно, что период малых колебаний ортогональной моды (стержень при таком колебании смещается поперек оси симметрии) определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Как изменит-

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50
$p, \text{ мм рт.ст.}$	4,58	9,21	17,54	31,82	55,32	92,5

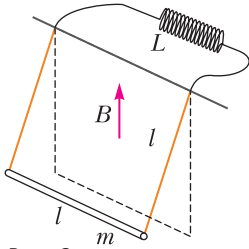


Рис. 8

Длина стержня и нитей одинакова и равна l , масса стержня m , индукция магнитного поля B , индуктивность катушки L . Сопротивления стержня, нитей и провода катушки малы.

Ф2640. На листе бумаги начерчен круг радиусом r . Сверху на лист кладут стеклянную полусферу, совмещая ее центр с центром нарисованного на бумаге круга (рис.9). Полусфера является толстой лин-

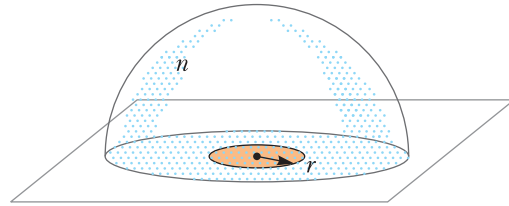


Рис. 9

зой. При рассматривании сверху изображение круга в этой линзе кажется увеличенным. Определите коэффициент увеличения изображения круга. Показатель преломления стекла $n = 3/2$. Радиус нарисованного круга значительно меньше радиуса полусферы.

Решения задач М2614–М2616, Ф2621–Ф2624

М2614. В таблице $n \times n$ разрешается переставлять местами строки, а также переставлять местами столбцы. В некоторых k клетках таблицы расставляют звездочки. При каком наибольшем k всегда можно добиться того, чтобы все звездочки стали находиться по одну сторону от главной диагонали (при этом на самой главной диагонали звездочек тоже не должно быть)?

Ответ: $n - 1$.

ся период этой моды, если маятник поместить в вертикальное магнитное поле, нити сделать проводящими и к точкам крепления нитей подключить катушку индуктивности?

Если изначально n звездочек расставлены так, что в каждой строке находится по одной звездочке, то это условие сохранится в процессе выполнения операций. Если бы при этом все звездочки оказались по одну сторону от главной диагонали, то образовалась бы пустая строка – противоречие.

Покажем теперь индукцией по n , что если в таблице $n \times n$ расставлено $n - 1$ звездочек, то указанными операциями можно добиться того, чтобы они оказались над главной диагональю, выходящей из левого нижнего угла. Переставим строки так, чтобы количества звездочек в строках не убывали снизу вверх (в частности, нижняя строка – пустая). Поочередно рассматриваем строки, начиная снизу. Перед рассмотрением k -й снизу строки считаем, что $k - 1$ первых (нижних) строк и m_{k-1} самых левых столбцов уже зафиксированы ($m_0 = 0$), при этом все звездочки $k - 1$ нижних строк находятся в этих столбцах и в каждом из этих столбцов есть хотя бы одна звездочка, которая кроме того находится в одной из первых $k - 1$ строк. Рассматривая k -ю строку, посмотрим на все звездочки в ней, которые расположены правее m_{k-1} -го столбца, и сдвинем соответствующие столбцы влево вслед за m_{k-1} -м, так чтобы они заняли места с $m_{k-1} + 1$ до m_k . Сделав такой проход от 1-й до n -й строки, получим нужную перестановку столбцов. Действительно, если бы какая-то звездочка в некоторой k -й строке оказалась по другую сторону от главной диагонали, это означало бы, что $m_k \geq k$, следовательно, в первых k строках не менее k звездочек. Так как в каждой из строк выше k -й есть хотя бы одна звездочка, то всего в таблице не менее n звездочек – противоречие.

П. Кожевников

М2615. Решение этой задачи см. в статье Чан Куанг Хюнга «Об ортоцентрических четверках, связанных с треугольником».

М2616. Докажите, что если $p \geq 5$ – простое число, то число

$$\left(\frac{(p-1)!}{1}\right)^p + \left(\frac{(p-1)!}{2}\right)^p + \dots + \left(\frac{(p-1)!}{p-1}\right)^p$$

делится на p^3 .

Сгруппируем в сумме k -е и $(p - k)$ -е слагаемые:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^p + \left(\frac{(p-1)!}{p-k}\right)^p &= \\ &= \left(\frac{(p-1)!}{k(p-k)}\right)^p (k^p + (p-k)^p). \end{aligned}$$

Тогда, раскладывая по биному, имеем $k^p + (p - k)^p = k^p - k^p + p \cdot k^{p-1} \cdot p + \frac{p(p-1)}{2} \cdot k^{p-2} \cdot p^2 + \dots$, где троеточие заменяет сумму слагаемых, заведомо делящихся на p^3 . Следовательно, $k^p + (p - k)^p \equiv p^2 \cdot k^{p-1} \pmod{p^3}$. Таким образом, для решения задачи достаточно доказать делимость на p суммы чисел $\left(\frac{(p-1)!}{k(p-k)}\right)^p \cdot k^{p-1}$, взятой по $k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$.

Далее задачу можно еще упростить, используя сравнения $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^p \equiv a \pmod{p}$ для $a = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$, которые верны в силу малой теоремы Ферма.

Наконец, докажем, что сумма

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$$

делится на p . Преобразуя слагаемое $\frac{(p-1)!}{k(p-k)}$ как $\frac{1}{p} \left(\frac{(p-1)!}{k} + \frac{(p-1)!}{p-k} \right)$, сводим задачу к известному факту о делимости на p^2 суммы $\frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \dots + \frac{(p-1)!}{p-1}$, т.е. суммы произведений чисел из множества $\{1, 2, \dots, p-1\}$, взятых в количестве $p-2$. Доказательство последнего факта можно найти в статье «Симметрические многочлены и делимость на p^s » в «Кванте» №5-6 за 2015 год. Задача решена.

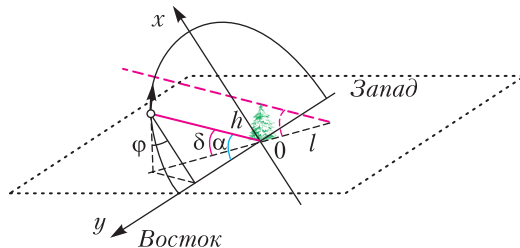
Схожими методами можно доказать следующее утверждение, обобщающее нашу задачу.

Пусть $p \geq 5$ – простое число, $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Из множества $\{1, 2, \dots, p-1\}$ возьмем все k -элементные подмножества, в каждом подмножестве перемножим числа, каждое произведение возведем в степень p , а полученные результаты просуммируем. Тогда полученная сумма делится на p^2 , а при нечетном $k \geq 3$ – даже на p^3 .

И. Вайнштейн

Ф2621. Утром 21 марта в Москве длина тени елочки высотой в 1 метр в некоторый момент времени в три раза больше ее высоты, и это отношение уменьшается. Сколько времени прошло с момента восхода Солнца? Какова скорость изменения длины тени?

Географическая широта Москвы $\varphi = 56^\circ$. Дата 21 марта – это день весеннего равноденствия, когда длительность пребывания Солнца над горизонтом равна длительности пребывания под горизонтом. Из гео-



метрии системы (см. рисунок) определяем угол восхождения солнца над горизонтом:

$$\sin \delta = \sin \alpha \cos \varphi$$

и соотношение высоты елочки и ее тени:

$$\frac{h}{l} = \operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{1 - (\sin \alpha \cos \varphi)^2}}{\sin \alpha \cos \varphi}.$$

Отсюда, в соответствии с данными задачи, получаем

$$3 = \frac{\sqrt{1 - (\sin \alpha \cos \varphi)^2}}{\sin \alpha \cos \varphi}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10} \cos \varphi}.$$

Будем считать, что движение солнца происходит с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/12$. Тогда

$$\alpha = \omega \Delta t = \frac{\pi}{12} \Delta t = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10} \cos \varphi},$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{12}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{10} \cos \varphi} = \\ &= \frac{12}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{10} \cos 56^\circ} \approx \\ &\approx 2,296 \text{ ч} \approx 2 \text{ ч } 18 \text{ мин.} \end{aligned}$$

Вот столько времени прошло с момента восхода Солнца.

Скорость изменения длины тени определяем с помощью производной:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = v &= \frac{h\omega}{\cos \varphi} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - (\sin \alpha \cos \varphi)^2}} = \\ &= -\frac{10}{3} h \frac{\pi}{12} \sqrt{10 \cos^2 \varphi - 1} \approx -2,1 \text{ см/мин.} \end{aligned}$$

А.Власов

Ф2622. Водитель легкового автомобиля массой $M = 1000$ кг в дальней поездке по прямой (из Москвы в Белгород) возле километрового столба с отметкой 100 км установил на счетчике пути значение 000,0 км. Проезжая мимо столба с отметкой 200 км, он увидел, что счетчик пути показал 101,0 км. Водитель остановил машину, подкачал все колеса от $p_1 = 1,1$ атм до положенных $p_2 = 2$ атм и продолжил путь. Возле столба с отметкой 300 км счетчик пути показал 201,0 км. Водитель удовлетворенно хмыкнул и поехал дальше, не останавливаясь. Каков диаметр колес его автомобиля, если ширина покрышек $d = 17,5$ см? Нагружены все колеса одинаково.

Счетчик пути, конечно же, вычисляет путь, умножая число оборотов вала, соединенного шестеренками с ведущими колесами, на определенный коэффициент, подобранный так, чтобы при нормальном (правильном) давлении воздуха в колесах автомобиля получалось и правильное значение пройденного расстояния. Если расстояние от оси колеса до дороги равно H , то угловая скорость вращения колеса при скорости движения автомобиля v равна v/H . Умножив угловую скорость вращения колеса на время движения, получаем связь между числом оборотов колес N и

длиной пройденного пути L :

$$2\pi N = \frac{L}{H}.$$

Пятно контакта колеса с дорогой определяется не только массой автомобиля M и шириной покрышек d , но и давлением воздуха p в колесах и жесткостью материала покрышек. Будем считать, что эта жесткость мала, тогда продольный размер пятна контакта x найдем из равенства

$$Mg = 4pdx, \text{ или } x = \frac{Mg}{4pd}.$$

Расстояние от оси колеса до поверхности дороги связано с его диаметром D и размером пятна контакта x соотношением (геометрия)

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - x^2} = \\ &= \frac{D}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{D}\right)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует связь между тем расстоянием, которое автомобиль проехал, и числом оборотов колес:

$$\begin{aligned} N &= \frac{L}{2\pi H} = \frac{L}{\pi D \sqrt{1 - \left(\frac{x}{D}\right)^2}} = \\ &= \frac{L}{\pi D \sqrt{1 - \left(\frac{Mg}{4pdD}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку после изменения давления воздуха в колесах от 1,1 атм = $1,1p_0$ до 2 атм = $2p_0$ счетчик стал показывать правильное расстояние, то получаем

$$N_1 \sim 101, \quad N_2 \sim 100,$$

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{Mg}{4p_2 d D}\right)^2}{1 - \left(\frac{Mg}{4p_1 d D}\right)^2} = 1,01^2 \approx 1,02.$$

Далее после преобразований находим

$$D = \frac{10Mg}{4d} \sqrt{\frac{1,02}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2}} = \\ = \frac{2,5Mg}{dp_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1,02}{1,1^2} - \frac{1}{2^2} \right)} \approx 0,78 \text{ м.}$$

Итак, диаметр колес равен примерно 0,78 м.

А.Козлевич

Ф2623. В воде глубокого озера на глубине $h = 10$ м на тонкой нитке удерживается воздушный шарик с тонкой нерастяжимой пластиковой оболочкой. Радиус шарика $R = 10$ см. Нитка рвется. Оцените: а) начальное ускорение шарика; б) скорость, которую он приобретет, приближаясь к поверхности воды.

Равновесие шарика, привязанного ниткой к дну сосуда, обусловлено действием сил натяжения нити и Архимедовой силы, а силой тяжести оболочки и воздуха, находящегося внутри шарика, можно, естественно, пренебречь. Величина силы Архимеда равна $\rho Vg = Mg$, где ρ – плотность, $V = (4/3)\pi R^3$ – объем и M – масса воды, вытесненной шариком, g – ускорение свободного падения. Как только начинается движение шарика (сразу после разрыва нити), приходит в движение вода, находящаяся рядом с шариком. И уменьшение потенциальной энергии системы «вода + шарик» в поле тяжести приводит к росту кинетической энергии частей этой системы – а именно воды. Эту энергию приобретает так называемая присоединенная масса воды, которая в случае шара, находящегося в большом (в сравнении с размерами шара) объеме однородной среды, равна $\rho V/2 = M/2$.

(Кстати, для других форм тел присоединенная масса бывает и больше указанной величины, и меньше этой величины. Она также может зависеть от направления, в котором начинается движение тела. Например, для плоского диска с радиусом R и с практически нулевым объемом при

движении в направлении оси симметрии диска присоединенная масса пропорциональна ρR^3 , а в направлении, перпендикулярном оси симметрии, эта масса практически равна нулю.)

После обрыва нити скорость движения нарастает, но сначала она мала. Поэтому вначале можно пренебречь силами трения и считать, что механическая энергия сохраняется. Отсюда следует

$$\frac{(M/2)v^2}{2} = Mg\Delta h = Mg \frac{v^2}{2a}.$$

Тогда для начального ускорения воздушного шарика получаем

$$a = 2g.$$

При ответе на второй вопрос нужно учесть, что скорость движения уже достаточно велика и силами трения пренебрегать нельзя. Будем говорить о вязком трении. Известно, что вода имеет коэффициент вязкости $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с), и в зависимости от скорости движения шарика в воде механизм действия силы трения таков, что при малых скоростях сила трения пропорциональна скорости движения, а если скорость больше некоторой величины, то сила трения пропорциональна квадрату скорости движения. Переход от одного механизма трения к другому характеризуется так называемым числом Рейнольдса $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$,

где ρ – плотность воды, v – скорость движения шарика и d – его диаметр. В нашем случае Re больше нескольких сотен ($> 10^3$). Сначала вычислим скорость движения гипотетического шарика без учета сил трения. Ускорение равно $a = 20$ м/с², пройденный путь равен $h = 10$ м, поэтому скорость равна $v = \sqrt{2ha} = 20$ м/с. Число Рейнольдса для шарика с радиусом $R = 0,1$ м, движущегося в воде с такой скоростью, по порядку величины равно 10^6 . Это во много раз превышает 10^3 , поэтому реализуется второй механизм трения, т.е. при подъеме шарика скорость его движения успеет установиться и сумма

всех сил, действующих на него, будет равна нулю. Отсюда получаем

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = k v^2 \pi R^2.$$

Коэффициент k зависит от формы движущегося тела, для шара он равен 0,2. Следовательно, скорость подъема нашего шарика будет равна

$$v = \sqrt{\frac{4Rg}{3k}} \approx 2,6 \text{ м/с.}$$

А число Рейнольдса будет равно $2,6 \cdot 10^5$, т.е. останется много больше 10^3 .

Если считать, что в процессе разгона у шарика было ускорение среднее между начальным и нулем, то установление характера движения шарика произойдет на пути, равном

$$l = \frac{v^2}{2(a/2)} \approx 0,3 \text{ м,}$$

что много меньше $h = 10 \text{ м}$.

С.Шариков

Ф2624. Суточный «ход» температуры воздуха летом на высоте 2 м (стандартная высота для метеорологических измерений) составляет в Сахаре 30° . Максимальная температура $+40^\circ\text{C}$. Погода устойчивая, небо безоблачное. Оцените толщину слоя воздуха на поверхности пустыни, вовлекаемого в конвекцию в течение суток. Солнечная постоянная равна 1370 Вт/м^2 .

От средней абсолютной температуры $\frac{283 + 313}{2} \text{ К} \approx 300 \text{ К}$ температура днем и ночью отклоняется в ту или другую сторону всего на 15° . В относительных величинах это всего $1/20$, т.е. примерно 5%. Теплообмен воздуха с поверхностью почвы и с космосом осуществляется разными механизмами теплопередачи. Прогревается воздух от почвы за счет конвекции, а остывает за счет излучения, которое и уходит в космос и падает на почву. При

нормальном давлении порядка 10^5 Па над каждым квадратным метром поверхности находится воздух массой 10^4 кг .

Примем для рассмотрения такую модель, в которой поглощение тепла воздухом и остывание воздуха происходят по очереди. За дневное время, т.е. примерно за 8 часов, при средней мощности падающего излучения 10^3 Вт и альбедо 40% на поверхности (песок в Сахаре) поглощается примерно

$$Q = 0,6 \cdot 8 \cdot 3600 \text{ с} \cdot 10^3 \text{ Вт} = 17,3 \text{ МДж}$$

тепловой энергии на квадратный метр поверхности. Найдем массу воздуха m , которая в процессе с постоянным давлением нагреется на 30 градусов, получив такое количество теплоты. Воздух над Сахарой (собственно, как и везде) состоит в основном из азота и кислорода (двухатомных молекул) со средней молярной массой $M = 0,029 \text{ кг/моль}$. Теплоемкость одного моля воздуха в процессе с постоянным давлением равна $C_p = 7/2 R = 29 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Тогда

$$C_p \frac{m}{M} \Delta T = Q, \text{ и } m = \frac{QM}{C_p \Delta T} \approx 580 \text{ кг.}$$

Конечно, на самом деле воздух в процессе нагрева перемешивается за счет конвекции, и средний суточный ход температуры воздуха с высотой уменьшается. Однако для оценки по порядку величины это можно не учитывать. Если бы атмосфера состояла из воздуха постоянной плотности, то ее высота равнялась бы примерно 8 км . В итоге оценка толщины слоя воздуха h , в котором суточный температурный ход имеет порядок 30 градусов, такова:

$$h \approx 8 \text{ км} \frac{580 \text{ кг}}{10^4 \text{ кг}} \approx 460 \text{ м.}$$

С.Пустынный

06

ортоцентрических четверках, связанных с треугольником

ЧАН КУАНГ ХЮНГ

В этой статье рассказывается о некотором обобщении задачи M2553. В процессе рассуждений мы также получим решение задачи M2615.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Пусть вписанная в него окружность имеет центр I и касается сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно.

В задаче M2553 через K и L были обозначены центры окружностей, вписанных в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 соответственно, а через H – основание высоты, опущенной из точки C . Точки P и Q определялись как точка пересечения биссектрисы угла AHC с A_1C_1 и точка пересечения биссектрисы угла BHC с B_1C_1 соответственно. Утверждение задачи состояло в том, что четверка K, L, P, Q – ортоцентрическая.

Решение задачи M2553 было приведено в статье А.Заславского «Об одной ортоцентрической четверке» в «Кванте» №7 за 2019 год. Там же доказывались некоторые другие свойства этой конструкции. В частности, было показано, что прямая PQ проходит через C , точка D пересечения KQ и PL лежит на AB , при этом CD – общая касательная к окружностям, вписанным в четырехугольники AB_1IC_1 и BA_1IC_1 . Автор обнаружил обобщения этих фактов, которые можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Пусть D – произвольная точка на стороне AB треугольника ABC , а K и L – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD соответственно (рис.1). Пусть $P = LD \cap A_1C_1$,

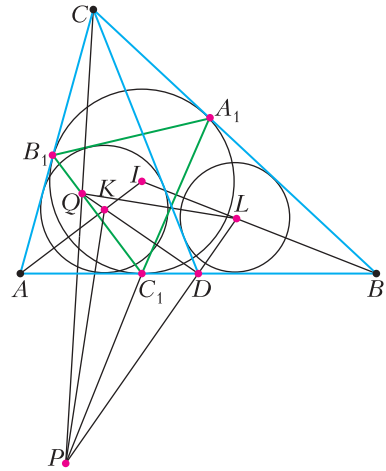


Рис. 1

$Q = KD \cap B_1C_1$. Тогда прямая PQ проходит через C , а четверка точек K, L, P, Q – ортоцентрическая.

Поскольку прямые DKQ и DLP – биссектрисы смежных углов, они перпендикулярны, т.е. одна из нужных перпендикулярностей установлена: $QK \perp PL$. Ниже мы докажем, что $CP \perp KL$. Поскольку, аналогично, $CQ \perp KL$, это завершит доказательство теоремы, так как отсюда будет следовать и то, что точки C, P, Q лежат на одной прямой, и еще одна перпендикулярность $PQ \perp KL$.

Введем точку M пересечения CK с B_1C_1 . В качестве вспомогательного утверждения будет выступать задача M2615.

M2615. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно (рис.2). На стороне AB выбрана произвольная

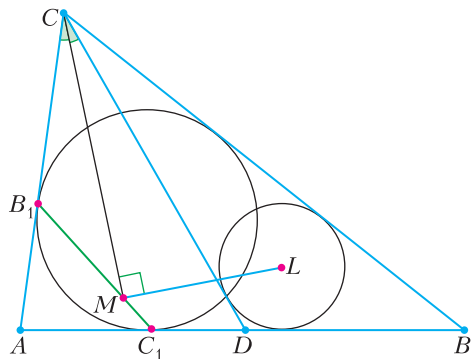


Рис. 2

точка D . Точка L – центр вписанной окружности треугольника BCD . Пусть биссектриса угла ACD пересекает прямую B_1C_1 в точке M . Докажите, что $\angle CML = 90^\circ$.

Рассмотрим рисунок 3, на котором все обозначения согласованы с нашими предыдущими обозначениями, поскольку CK –

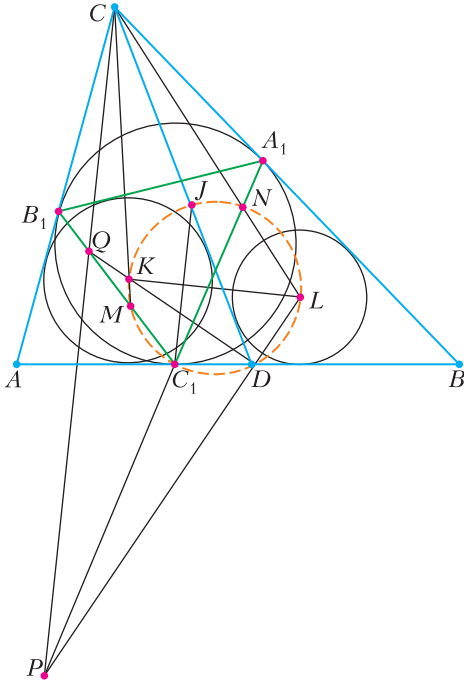


Рис. 3

биссектриса угла ACD . Утверждение задачи M2615 можно теперь переформулировать следующим образом: точка M лежит на окружности ω , построенной на KL как на диаметре.

Ясно, что D лежит на ω . Кроме того, по известной задаче Шарыгина (см., например, <http://zadachi.mccme.ru/2012/task10602>) на ω лежит и C_1 (отметим, что это утверждение также следует из задачи M2007 в случае вырожденного описанного четырехугольника).

Точка M лежит на окружности (KC_1D) , т.е. на окружности ω , поскольку

$$\angle AKD = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle B_1C_1B.$$

Тем самым, $\angle KLM = 90^\circ$ как угол, опирающийся на диаметр. Задача M2615 реше-

на.

Заметим, что в вырожденном случае, когда $D = L = B$, задача M2615 превращается в задачу 255 из задачника И.Ф.Шарыгина «Геометрия, 9–11 классы: От учебной задачи к творческой» (М.: Дрофа, 1996).

Аналогично точке M введем в рассмотрение точку N пересечения CL с A_1C_1 , она также лежит на ω . Пусть CD вторично пересекает ω в точке J . Из равенства углов CDK и KDA следует равенство дуг KC_1 и KJ окружности ω , таким образом, точка J симметрична точке C_1 относительно KL .

В качестве отступления заметим, что известны другие описания точки J : эта точка лежит на второй (помимо AB) общей внешней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ACD и BCD , а также J – точка на CD такая, что $CJ = CB_1 = CA_1$ (см., например, задачу <http://zadachi.mccme.ru/2012/task4278>, которая предлагалась на Турнире городов в 1994 году).

Далее доказательство теоремы можно завершить коротко, применив теорему Паскаля к шестерке точек $NLLDJC_1$ с кратной точкой L (все названные точки лежат на ω). Получаем, что точки $S = NL \cap DJ$, $P = LD \cap C_1N$ лежат на одной прямой с бесконечно удаленной точкой пересечения C_1J с касательной к ω , проведенной в точке L . Иными словами, $CP \parallel C_1J$. Тем самым, нужная перпендикулярность $CP \perp KL$ установлена, поскольку $C_1J \perp KL$.

Задачи

Ниже приведены некоторые шуточные задачи и вопросы из замечательной книги В.В.Произволова «Задачи на вырост». Как Вячеслав Викторович напутствует читателя к размышлению над ними, ответ будет считаться правильным тогда, когда он остроумен.

1. На рисунке изображена кошка, которая выглядывает из-за забора. Определите примерную длину кошки.



2. В детском саду воспитательница кладет перед ребенком лист бумаги, на котором нарисовано несколько кружочков.

— Сколько здесь кружочков? — спрашивает она.

— Семь, — отвечает ребенок.

— Правильно! — говорит воспитательница. Затем она кладет этот лист



перед другим ребенком и задает тот же вопрос.

— Пять, — отвечает ребенок.

— Правильно! — вновь говорит воспитательница.

Сколько же кружочков нарисовано на бумаге?

3. Я не знал, какое слово оканчивается на три «е». Оказалось, «длинношеее»! В отместку я придумал свой вопрос для приятеля: «А вот ты скажи, какое существительное оканчивается на три «ё»».



4. Сделав хитрое лицо, математик сказал девятилетнему мальчику: «Назови самое большое число». Лицо математика вытянулось, когда он услышал ответ, — он сам не мог бы назвать большее число. Какое число назвал мальчик?



Второго ноября 2020 года скончался Николай Христович Розов, математик, педагог, член редколлегии «Кванта» с самого первого номера нашего журнала, очень интересный и хороший человек.

Многие вехи его судьбы, по-видимому, безвозвратно ушли вместе с ним. Он родился в семье болгарского революционера, который вынужден был эмигрировать в Советский Союз. У

Николая Христовича была Болгария, родина его отца, и наша страна, в которой он родился и где прожил всю свою жизнь. Но, может быть, истинной обетованной землей для Николая Христовича Розова была страна его мечтаний, в которой люди, распри позабыв, соединяются в единую семью. Его профессией, делом, которому он посвятил свою жизнь, стало математическое просветительство в самом широком смысле этого слова.

Николай Христович окончил мехмат МГУ, был активным участником семинара по теории дифференциальных уравнений, организованного Л.С. Понтрягиным, и математической специализацией своей выбрал обыкновенные дифференциальные уравнения. Его перу принадлежит множество научных работ – статей, монографий, учебных пособий. Среди книг, написанных Николаем Христовичем вместе с другими авторами, есть, между прочим, и «Французско-русский математический словарь».

Другой – не менее, а возможно, и более значимой, чем научная, была для Н.Х.Розова педагогическая работа. Образование с его проблемами, как старыми, так и новыми, всегда привлекало внимание Николая Христовича, он много работал в этой области, а в 1997 году возглавил новый



Николай Христович Розов
(20.02.1938 – 02.11.2020)

факультет МГУ – факультет педагогического образования, в создании которого сам принимал большое участие, и кафедру образовательных технологий. Задача факультета – обучить научных специалистов сложному и тонкому искусству преподавания.

Наверное, каждый абитуриент знает по крайней мере одну книгу Николая Христовича (написанную

в соавторстве с Г.В. Дорофеевым и М.К. Потаповым) – это «Пособие по математике для поступающих в вузы», впервые изданное в 60-х годах прошлого века и выдержавшее с тех пор множество изданий (едва ли не каждый год).

Николай Христович – автор многих статей о содержании школьной математики и ее преподавании, он содействовал становлению ВЗМШ (Всесоюзной заочной математической школы при МГУ), работал в методической комиссии по математике при оргкомитете Всесоюзной олимпиады, возглавлял секцию средней школы Московского математического общества, был членом редколлегии журнала «Математика в школе», руководил лабораторией математического образования в МИРОСе (Московский институт развития образовательных систем), был одним из тех, благодаря кому в нашу страну пришла олимпиада «Кенгуру».

В журнале «Квант» опубликовано немало статей Н.Х.Розова, в том числе обзорные подборки материалов «Читатели советуют». В этих обзорах активные читатели «Кванта» находили слова одобрения и поддержки своих первых математических исследований.

Мы очень любили Николая Христовича Розова, и нам будет его не хватать.

Чертеж в геометрической задаче

Г. ДОРОФЕЕВ, Н. РОЗОВ

НА РОЛЬ ЧЕРТЕЖА В РЕШЕНИИ геометрической задачи поступающие смотрят по-разному. Одни думают, что чертеж вообще не нужен, и выполняют его подчеркнуто небрежно. Другие, наоборот, считают сам чертеж достаточным аргументом в рассуждениях и даже не находят нужным как-либо обосновывать то, что «видно из чертежа». Обе эти крайние точки зрения неправильны.

Разумеется, никакой чертеж, даже самый аккуратный, не может заменить логического доказательства, а является лишь иллюстрацией к рассуждениям. Любой геометрический факт, который мы «увидели» на чертеже, необходимо строго обосновать – только тогда можно утверждать, что этот факт действительно имеет место, а не получен из верного (или, что гораздо опаснее, неверного) рисунка.

В то же время наглядный чертеж – хороший помощник при решении задачи: он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать некоторую теорему или придумать удачное дополнительное построение. Недаром математики вообще часто прибегают к геометрическим иллюстрациям, чтобы сделать идеи доказательства более понятными.

Однако помочь решить задачу может только чертеж, правильно отражающий существенные геометрические особенности конфигурации, о которой идет речь в условии. Именно поэтому к чертежу следует относиться очень внимательно.

Часто поступающие ограничиваются первым более или менее удачно выполненным рисунком, не интересуясь, насколько точно сделанный чертеж отвечает условию задачи.

Между тем, во многих задачах провести полное решение по одному чертежу в принципе невозможно, поскольку условие задачи допускает существование геометрически различных конфигураций. Кроме того, такая привязанность к одному «случайному» чертежу приводит и к иной неприятности: в ходе решения задачи может обнаружиться противоречие между получающимися результатами и исходным чертежом, которое обычно ставит поступающих в тупик. Однако при правильном понимании роли чертежа в этом нет ничего страшного – следует просто отказаться от первоначального изображения и сделать новый чертеж, соответствующий появившейся геометрической информации (конечно, при условии, что проведенные рассуждения и вычисления правильны).

При построении чертежа бывает полезно делать не примерный эскиз, дающий лишь общее представление о геометрической конфигурации, а стремиться последовательно конструировать чертеж, опираясь на данные задачи и общие геометрические факты. При таком подходе легче «увидеть» те идеи, которые можно применить в решении.

Задача 1 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). *В треугольнике ABC угол B равен 90° , $AB = 4$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ проходит через точки B и D и касается в точке V окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите площадь треугольника ABC .*

Прежде всего построим треугольник ABC с прямым углом B (рис. 1). Для построения окружности, описанной около этого треугольника, выясним сначала, где находится ее центр O и чему равен ее радиус. Как известно, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в

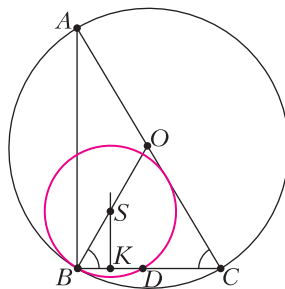


Рис. 1

середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы. Это дает возможность построить описанную окружность.

Займемся теперь построением другой окружности. Отметим на стороне BC точку D , мы можем утверждать, что центр этой окружности лежит на перпендикуляре, проведенном через середину K отрезка BD . Из условия касания окружностей заключаем, что центр рассматриваемой окружности лежит на радиусе описанной окружности, проведенном в точку касания, т.е. в точку B . Иначе говоря, центр S окружности, о которой идет речь в условии, есть точка пересечения прямой SK и медианы BO .

Построение чертежа закончено. В ходе этого построения мы установили два факта, на которых и основывается решение задачи: во-первых, центр S лежит на стороне BO равнобедренного треугольника BOC ; во-вторых, перпендикуляр, опущенный из центра S на катет BC , проходит через середину отрезка BD .

Теперь проведем необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника BSK по теореме Пифагора находим $SK = 1$, а тогда $\operatorname{ctg} \angle SBK = 1/2$. Но $\angle ACB = \angle OBC$, и поэтому $BC = AB \operatorname{ctg} \angle ACB = 2$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна 4.

Итак, задача полностью решена, и идею решения мы получили благодаря последовательному конструированию чертежа. Однако, как это ни удивительно на первый взгляд, чертеж, изображенный на рисунке 1, полностью условию задачи не соответствует. В самом деле, проведенные вычисления показывают, что $BC = 2$, а $AC = 2/\sqrt{5}$. Следовательно, $BO = \sqrt{5} = 2SB$, т.е. BO – диаметр окружности с центром S , которая, таким образом, проходит через точку O . Другими словами, полностью соответствует данным задачи рисунок 2.

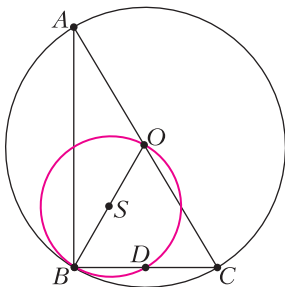


Рис. 2

В чем же причина неполного соответствия рисунка 1 данным задачи? Дело в том, что проведенное конструирование чертежа касалось только его геометрической стороны, но не учитывало всех конкретных числовых данных. Более того, мы не могли их учесть, поскольку все числовые размеры конфигурации, а следовательно, и ее геометрически точный вид, удастся установить только после соответствующих вычислений.

Тем не менее, изложенное выше решение является исчерпывающим, хотя, как мы теперь убедились, основывалось на неточном чертеже. Это объясняется просто: в наших рассуждениях нигде не использовалось взаимное расположение точки O и окружности с центром S , выяснение их взаимного расположения при данном способе решения задачи не обязательно.

Подобная ситуация является в геометрической задаче типичной. Практически никогда, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, – многие ее особенности вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно прежде всего выявлять геометрические свойства, существенные в данной задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда далеко не всегда очевидно, какие именно особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и чертежом.

Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный. Например, в следующей задаче даже развитое геометрическое воображение не может помочь сразу выполнить чертеж, точно отражающий существенные особенности конфигурации.

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр указанной сферы лежит на ребре AB , и найдите высоту пирамиды.*

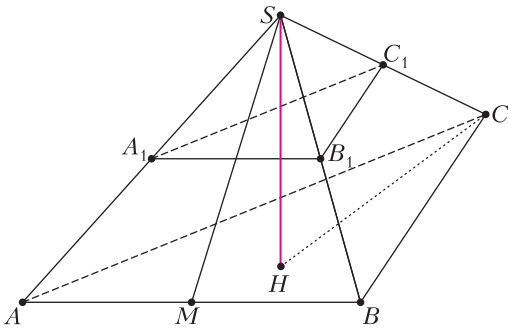


Рис. 3

Для решения задачи сделаем традиционный чертёж пирамиды $SABC$ (рис.3), построим ее высоту SH и проведем отрезок HC . Так как по условию задачи $\angle SCH = 60^\circ$, то из треугольника CHS находим $SH = a\sqrt{3}/2$, $HC = a/2$, где через a обозначена длина ребра SC .

По условию вершины A, B, C и середины A_1, B_1, C_1 соответствующих боковых ребер лежат на одной сфере. Отсюда, в частности, следует, что через точки A, A_1, B, B_1 проходит окружность – сечение этой сферы плоскостью грани SAB . Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то четырехугольник AA_1B_1B – трапеция, и притом равнобочная, поскольку она вписана в окружность. Поэтому

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SB.$$

Аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C показывают, что пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра: $SA = SB = SC = AB = a$. Отсюда видно, что треугольник ASB – равносторонний, а поэтому апофема SM этой боковой грани равна $a\sqrt{3}/2$, т.е. $SM = SH$.

Таким образом, высота пирамиды совпадает с апофемой боковой грани ASB . Но тогда точка H совпадает с M , а грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны. Поэтому изображенная на рисунке 3 картина на самом деле не соответствует условию задачи, верным будет рисунок 4.

Дальнейшее решение не представляет труда. Проекция на плоскость ABC (см. рис.4) равных наклонных SA, SB, SC равны: $HA = HB = HC = a/2$, следова-

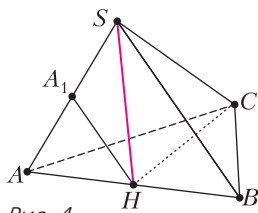


Рис. 4

тельно, точка H – центр окружности, описанной около треугольника ABC , а потому центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восставленном из точки H , т.е. на высоте SH пирамиды (или на ее продолжении). Центр этой сферы равноудален, например, от точек A и A_1 . Поскольку $HA_1 = a/2$ как средняя линия треугольника ASB , то $HA_1 = HA$, так что точка H , лежащая на ребре AB , как раз и является центром сферы. Но радиус этой сферы по условию равен 1, $HA = a/2 = 1$, $a = 2$ и $SH = \sqrt{3}$.

Иногда само условие задачи умышленно бывает сформулировано несколько неопределенно – так, что оно явно допускает геометрически существенно различные чертежи, и непосредственно по исходным данным не ясно, какая именно из конфигураций имеется в виду. В таком случае надо изобразить на нескольких чертежах все возможности, отвечающие условию задачи, а затем, исследуя каждый чертёж, найти истинную геометрическую конфигурацию.

Задача 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1975). *В равнобочной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса 1, вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найдите площадь трапеции.*

Непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции – в тупой или в острый – вписана вторая окружность. Поэтому мы должны рассмотреть оба варианта (рис.5) и попытаться выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, заданными в условии.

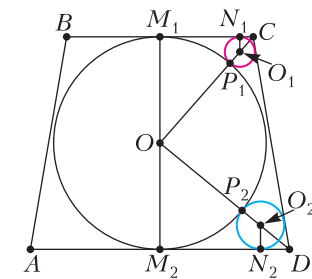


Рис. 5

Пусть O – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, O_1, O_2 – центры второй окружности (два варианта!), $P_1, P_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ – точки касания. Радиусы второй окружности обозначим через r_1, r_2 . Из подобия треугольников OM_1C и O_1N_1C в первом случае и OM_2D и O_2N_2D во втором имеем

$$\frac{OM_1}{O_1N_1} = \frac{OC}{O_1C}, \quad \frac{OM_2}{O_2N_2} = \frac{OD}{O_2D},$$

а поскольку $OC = OP_1 + P_1C = 1 + 4r_1$, $OD = OP_2 + P_2D = 1 + 4r_2$, то в обоих случаях

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + 4r}{3r},$$

откуда $r = 1/2$. По теореме Пифагора из треугольников OM_1C и OM_2D соответственно получаем теперь, что

$$M_1C = 2\sqrt{2}, \quad M_2D = 2\sqrt{2}.$$

Итак, если вторая окружность вписана в тупой угол трапеции, то меньшее основание трапеции равняется $4\sqrt{2}$; если же вторая окружность вписана в острый угол трапеции, то большее основание трапеции равно $4\sqrt{2}$. Между тем, если в равнобокую трапецию с основаниями a и b , где $a < b$, вписана окружность диаметра d , то выполняется неравенство $a < d < b$ – это следует, например, из легко доказываемого и весьма полезного соотношения $d = \sqrt{ab}$. Поэтому в нашей задаче меньшее основание трапеции должно быть меньше 2, так что окружность с центром O_1 условию задачи не удовлетворяет, и следует рассматривать лишь окружность с центром O_2 . Теперь уже легко найти площадь S трапеции. Пользуясь соотношением между основаниями трапеции и диаметром вписанной в нее окружности $d = \sqrt{ab}$, мы получаем равенство

$$2 = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{4\sqrt{2}BC},$$

откуда $BC = \sqrt{2}/2$ и

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2 = 9\sqrt{2}/2.$$

В разобранной задаче возможность существования двух принципиально различных геометрических конфигураций была совершенно очевидна. Однако не всегда это так, и

нужно обладать хорошим геометрическим воображением и проявлять достаточную осознанность, чтобы при выполнении чертежа «увидеть» все конфигурации, которые следует рассмотреть в решении.

Задача 4 (МГУ, географич. ф-т, 1968). *Высота прямой призмы равна 1, ее основанием служит ромб со стороной 2 и острым углом 30° . Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом в 60° . Найдите площадь сечения.*

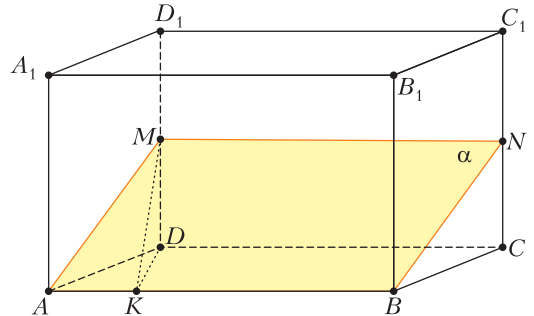


Рис. 6

На экзамене многие поступающие, выполнив рисунок 6, дали примерно следующее «решение» этой задачи: «Пусть MN – линия пересечения секущей плоскости α с плоскостью грани DCC_1D_1 ; опустив перпендикуляр MK на AB , по теореме о трех перпендикулярах получим, что $KD \perp AB$. Поэтому $\angle MKD$ – линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания, так что $\angle MKD = 60^\circ$. Тогда $MK = \frac{KD}{\cos 60^\circ} = \frac{AD \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 2$. Но MK – высота параллелограмма $AMNB$, полученного в сечении, а следовательно, искомая площадь $S = AB \cdot MK = 4$ ».

В этом рассуждении есть существенный пробел; чертеж, на котором оно основано, выполнен при неявном предположении, что плоскость α пересекает прямоугольник DCC_1D_1 . Между тем при заданных числовых данных это вовсе не очевидно, более того – неверно: в действительности плоскость α «выходит» из данной призмы через верхнюю грань, а точка M лежит на продолжении ребра DD_1 . В самом деле, найди так же, как и выше, что $MK = 2$ (заметим, что это вычисление не зависит от положения точки M на прямой DD_1), из треугольника MKD

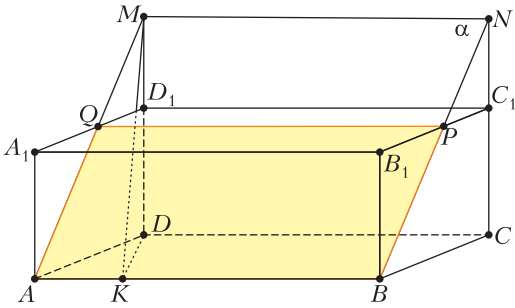


Рис. 7

мы получим, что $MD = \sqrt{3}$, так что MD больше DD_1 . Следовательно, речь в задаче идет о конфигурации, указанной на рисунке 7, и искать надо площадь параллелограмма $AQPВ$, а не $AMNB$. Дальнейшее решение задачи не вызывает принципиальных затруднений, и мы предоставляем это читателям; искомая площадь $S = 4/\sqrt{3}$.

Еще большее внимание требуется при решении задач, в которых геометрическая конфигурация задается не числовыми, а буквенными данными, т.е. в своего рода геометрических задачах с параметрами. В этих задачах (так же, как и в алгебраических задачах с параметрами) и способ решения и получаемый ответ могут существенно зависеть от соотношений между параметрами, определяющими конфигурацию.

Пусть, например, в разобранный только что задаче секущая плоскость проведена под углом φ к плоскости основания, а все остальные числовые данные – те же самые. Тогда в решении следует рассмотреть три случая:

- 1) точка M лежит на ребре DD_1 ;
- 2) точка M совпадает с D_1 ;
- 3) точка M лежит на продолжении ребра DD_1 .

Какой именно из указанных случаев имеет место, зависит от величины угла φ , и определить это можно, исходя из сравнения отрезков MD и D_1D . Независимо от расположения точки M на прямой DD_1 , ясно, что $MD = KD \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi$. Поэтому указанные случаи определяются условиями:

- 1) $\operatorname{tg} \varphi < 1$;
- 2) $\operatorname{tg} \varphi = 1$;
- 3) $\operatorname{tg} \varphi > 1$.

Таким образом, если $\varphi < 45^\circ$, то имеет место первый случай (см. рис.6), и тогда

$S = 2/\cos \varphi$. Если $\varphi > 45^\circ$, то имеет место третий случай (см. рис.7), тогда $S = 2/\sin \varphi$. Что же касается случая $\varphi = 45^\circ$, то его нужно было бы рассмотреть на специальной чертеже, Но фактически можно использовать и любой из имеющихся – так довольно часто бывает при рассмотрении «крайних» значений; в этом случае $S = 2\sqrt{2}$.

Окончательный ответ записывается в виде

$$S = \begin{cases} 2/\cos \varphi, & \text{если } \varphi < 45^\circ, \\ 2\sqrt{2}, & \text{если } \varphi = 45^\circ, \\ 2/\sin \varphi, & \text{если } \varphi > 45^\circ. \end{cases}$$

Можно, разумеется, включить второй случай в любой из двух других и записать ответ более компактно.

С аналогичной ситуацией мы встречаемся и в следующей задаче. Правда, окончательный ответ в ней от вида конфигурации не зависит и одинаков для всех значений параметра, однако промежуточные вычисления проводятся по-разному для различных конфигураций. Естественно, что решение, в котором рассмотрены не все геометрически различные случаи, не может считаться полноценным, хотя формально получается правильный ответ.

Задача 5 (МГУ, мехмат, 1970). Шар радиуса r касается плоскости P в точке A . Прямая l образует с плоскостью P угол φ , пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B . Найдите длину отрезка AB , если $AC = 2r$.

Изобразим конфигурацию, о которой идет речь в условии (рис.8). Из точки B опустим перпендикуляр BB_1 на плоскость P и проведем отрезок CB_1 ; ясно, что $\angle CBB_1 = \varphi$. Далее, $OA = OB = r$, а $CB = CA = 2r$ по свойству касательных к шару, проведенных из одной точки.

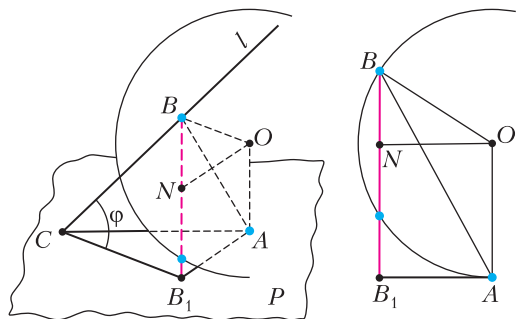


Рис. 8

Искомый отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1A , катет BB_1 которого определяется из прямоугольного треугольника CB_1B : $BB_1 = 2r \sin \varphi$. Остается найти катет AB_1 . Прямые OA и BB_1 , перпендикулярные к плоскости P , лежат в одной плоскости. Проведем в ней прямую $ON \parallel AB$; тогда $AONB_1$ – прямоугольник и, следовательно, $AB_1 = ON$, $NB_1 = OA = r$. Так как

$$NB = BB_1 - NB_1 = 2r \sin \varphi - r,$$

то из треугольника ONB

$$ON^2 = OB^2 - NB^2 = 4r^2 \sin \varphi (1 - \sin \varphi),$$

а из треугольника BB_1A

$$AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{ON^2 + BB_1^2} = 2r \sqrt{\sin \varphi}.$$

Не следует, однако, думать, что задача решена. В самом деле, при вычислении отрезка NB мы существенно использовали тот факт, что точки B , N и B_1 расположены именно так, как это изображено на рисунке 8. Но из условия задачи вовсе не следует, что точка N лежит между B и B_1 ; точка B может лежать между точками N и B_1 , точки N и B могут даже совпадать. Только рассмотрев все эти случаи, мы можем утверждать, что провели исчерпывающее решение задачи.

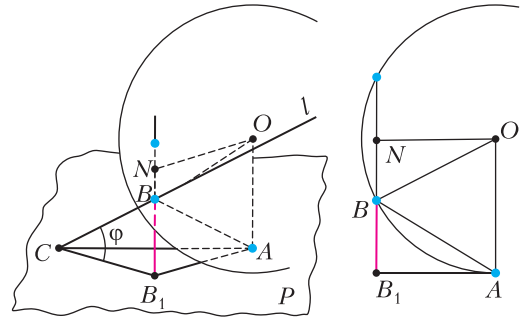


Рис. 9

Если точка B лежит между N и B_1 (рис.9), то

$$NB = NB_1 - BB_1 = r - 2r \sin \varphi,$$

а дальнейшее вычисление отрезков ON и AB проводится точно так же, как и выше; в результате мы приходим к той же формуле для отрезка AB . Если, наконец, точки N и B совпадают, то ясно, что $BB_1 = ON = r$, и $AB = r\sqrt{2}$. В этом случае в треугольнике CB_1B катет $BB_1 = r$ составляет половину гипотенузы $CB = 2r$, а потому $\varphi = 30^\circ$, т.е. $AB = 2r\sqrt{\sin \varphi}$.

Таким образом, равенство $AB = 2r\sqrt{\sin \varphi}$ справедливо при любых возможных значениях φ .

Решение этой задачи можно провести и с помощью рассуждений, не зависящих от конкретного расположения точек B , B_1 и N – попробуйте сделать это самостоятельно.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest
Желаем успеха!*

9. Можно ли записать в каждой вершине куба натуральное число так, чтобы все 8 чисел были различны, но произведение чисел в вершинах каждой грани было одно и то же?

М.Евдокимов

10. а) На клетчатом листе нарисовали четырехугольник с вершинами в узлах сетки (рис.1). Докажите, что у него один из углов в два раза больше другого.

б) Нарисуйте на клетчатом листе выпуклый четырехугольник с вершинами в уз-

лах сетки, у которого один из углов в четыре раза больше другого.

М. Евдокимов

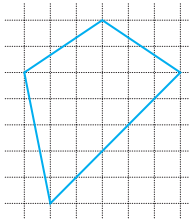


Рис. 1

11. Дан треугольник ABC . На лучах AB и AC отметили соответственно точки A_B и A_C так, что $AA_B = AA_C = BC$. Пусть A_1 – пересечение прямых BC и A_BA_C . Аналогично определяются точки B_1 и C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

М. Тимохин

12. Есть n лампочек и $2n$ выключателей. Каждая лампочка подключена к своим двум выключателям; она горит в том и только в том случае, когда оба ее выключателя включены. В начальный момент все выключатели выключены. Неизвестно, какие выключатели подключены к каким лампочкам. За одну попытку можно одновременно включить любое количество выключателей и увидеть, какие лампочки при этом будут гореть. Существует ли алгоритм, позволяющий установить, какие выключатели принадлежат каким лампочкам:

- а) сделав не более $2n - 1$ попыток;
- б) сделав не более $n + 1$ попыток?

В. Расторгуев

13. Квантик и Ноутик играют в такую игру. Ноутик диктует Квантику цифры от 1 до 9 в том порядке, в котором захочет (каждую по одному разу). Квантик записывает их на листе бумаги, причем каждую цифру, начиная со второй, пишет либо слева, либо справа от всех ранее написанных цифр. В результате на листе образуется девятизначное число. Квантик хочет, чтобы оно было как можно больше, а Ноутик – чтобы оно было как можно меньше. Какое число получится, если оба будут играть наилучшим образом?

И. Акулич

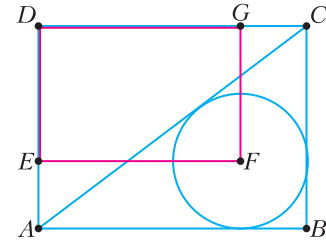


Рис. 2

14. Даны два прямоугольника $ABCD$ и $DEFG$, причем точка E лежит на отрезке AD , точка G лежит на отрезке CD , а точка F – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис.2). Во сколько раз площадь прямоугольника $ABCD$ больше площади прямоугольника $DEFG$?

А. Андреева, М. Панов

15. Для каких натуральных n набор чисел $1, 2, \dots, n$ можно разбить на две группы так, чтобы произведение чисел одной группы было равно сумме чисел другой группы?

В. Лецко

16. Карточный шулер тасует колоду из N карт, число N четно. Делает он это «пролистыванием». Сначала одним действием он разделяет колоду на две равные стопки – верхняя часть становится первой стопкой, нижняя второй. Затем кладет их рядом и одновременно «пролистывает» их обе так, что стопки соединяются следующим образом: вниз ложится нижняя карта первой стопки, на нее ложится нижняя карта второй стопки, на нее – вторая снизу карта первой стопки, на нее – вторая снизу карта второй стопки и так далее. Например, для колоды из 8 карт из колоды (12345678), где 1 обозначает нижнюю карту, получается колода (51627384). Шулер хочет, чтобы после нескольких таких действий карты в колоде лежали так же, как сначала. Докажите, что для этого ему достаточно сделать не более N действий.

Е. Бакаев

...можете вы указать, где находится кончик летящей стрелы?

Зенон Элейский

Почему если к дереву приложить топор, обремененный тяжелым грузом, то дерево будет повреждено незначительно, но если поднять топор без груза и ударить по дереву, то оно расколется?

Аристотель

Вопреки здравому смыслу, сила давления на дно сосуда не зависит от его формы, а зависит

лишь от высоты столба жидкости, ее плотности и площади дна.

Парадокс Паскаля

...Пока ящик не открыт, кот внутри ящика пребывает в суперпозиции двух состояний, т.е. ни жив, ни мертв.

Парадокс Шрёдингера

...в физике парадокс — всего лишь путаница в нашем собственном понимании.

Ричард Фейнман

Когда съедают бублик, куда девается дырка?

Фольклор

А так ли хорошо знакомы вам физические парадоксы?

История физики изобилует парадоксами! Иногда нехитрыми, требующими лишь более внимательного взгляда и привлечения уже известных знаний, чтобы разрешить кажущиеся противоречия. А порой глубокими, затрагивающими основы существующих теорий и ведущими к их пересмотру. Размышления над парадоксами занимали умы выдающихся ученых, а их анализ сыграл важную роль в развитии современной физики.

Однако и в пределах школьного курса найдется немало задач, носящих парадоксальный характер и вроде бы расходящихся со здравым смыслом. Их решение, надеемся, позволит выйти за рамки привычных, стандартных подходов, расширит представления о физических явлениях, а также предостережет от некоторых, бывает обидных, ошибок. Вооружимся парадоксальной поговоркой «невероятно, но факт» — и смело вперед!

Вопросы и задачи

1. В закрытом равномерно движущемся вагоне в центре пола лежит мяч, а над ним у потолка висит легкий резиновый шарик, надутый водородом. Как будут двигаться мяч и шарик, если вагон резко затормозит? Соппротивлением воздуха и трением мяча о пол можно пренебречь.

2. А как бы на вопрос Аристотеля (см. эпиграф) ответили вы?

3. Обруч, раскрученный в вертикальной плоскости и посланный по полу рукой гимнастки, через несколько секунд сам возвращается к ней. Чем это объяснить?

4. Шарик массой m , связанный нитью с неподвижной осью, движется по окружности со скоростью v . Его кинетическая энергия равна $mv^2/2$ и постоянна. Однако в системе отсчета, движущейся в плоскости вращения шарика со скоростью v , его кинетическая энергия изменяется от 0 до $2mv^2$. Согласуется ли это с законом сохранения энергии?

5. На монете начерчена мелом прямая линия. Разве не должна искривляться эта линия, если монету нагреть?

6. Если капнуть воду на горизонтальную раскаленную плиту, то капелька долго держится, почти не испаряясь. Если сделать это при слабо накаленной плите, то капелька почти мгновенно с шипением испарится. Как истолковать разницу в таком «поведении» капельки?

7. Открыв дверцу холодильника в жаркий день, мы чувствуем поток устремленного в комнату охлажденного воздуха. Можно ли таким путем создавать прохладу в комнате?

8. Медная труба с внешним диаметром 1 см служит проводником пара. Чтобы уменьшить тепловые потери, ее покрыли слоем теплоизоляции толщиной 5 мм. Однако потери после этого не только не уменьшились, но даже возросли. Почему?

9. Разность потенциалов между обкладками заряженного плоского воздушного конденсатора прямо пропорциональна расстоянию между ними. Раздвигая пластины, мы вроде бы можем неограниченно увеличивать эту разность потенциалов. Нет ли здесь противоречия?

10. К положительно заряженному шару *A* поднесли металлический положительно заряженный шар *B*, который стал притягиваться к шару *A*. Как же так, ведь одноименно заряженные тела должны отталкиваться!?

11. С помощью маленького осколка зеркала на стене наблюдают солнечный «зайчик», причем его круглая форма почему-то не зависит от формы осколка. В каком случае это происходит?

12. Спичкой можно закрыть от глаза какое-нибудь слово книжного текста. Однако если держать спичку в 1–2 сантиметрах от глаза, то текст будет виден «сквозь» спичку. Чем это объясняется?

Микроопыт

Возьмите стакан, до половины заполненный водой, и накройте его листом бумаги. Плотно прижмите бумагу рукой и переверните стакан вверх дном. Убедившись, что бумага расположена горизонтально, уберите руку. Вода не выливается! Что за парадокс?

Любопытно, что...

...по главной апории (по-гречески – затруднение) Зенона против движения, летящую стрелу нельзя отличить от покоящейся. Выйти из этого «безвыходного положения» удалось лишь в середине XVII века с введением Гюйгенсом понятия скорости.

...мировоззренческой основой древнегреческих ученых, приводящей к парадоксам, был отказ от каких бы то ни было текущих процессов, якобы недоступных для научного анализа, и ограничение од-

ними лишь застывшими «состояниями».

...знаменитый гидростатический парадокс, вошедший в школьные учебники под именем закона Паскаля, значительно ранее был открыт Симоном Стевином, кстати говоря, восстановившим результаты, полученные еще Архимедом.

...в соответствии с установленным в 1905 году законом, значительная часть энергии в спектре теплового излучения приходится на его коротковолновую (ультрафиолетовую) область, что противоречит эксперименту. Такое несоответствие получило название ультрафиолетовой катастрофы или парадокса Рэлея – Джинса.

...ньютонова теория тяготения оказалась неприменимой к появившейся в начале XX века новой модели Вселенной, приводя к гравитационному парадоксу, согласно которому в любой точке Вселенной должна действовать бесконечно большая сила.

...прошлый век подарил новые, поначалу казавшиеся парадоксальными, физические представления: электрическое и магнитное поля не существуют отдельно, а для разных наблюдателей одно и то же поле может проявляться или как магнитное, или как электрическое, или как их смесь в самых разных пропорциях.

...расхождение в возрасте близнецов, один из которых остается на Земле, а другой совершает космическое путешествие, – пожалуй, самый известный парадокс в теории относительности.

...в конце XX века активно обсуждался так называемый квантовый эффект Зенона. Его основное парадоксальное утверждение заключалось в том, что непрерывное наблюдение за процессом радиоактивного распада делает сам распад невозможным.

Что читать в «Кванте» о физических парадоксах

(публикации последних лет)

1. «О роли парадоксов в развитии науки» – 2016, приложение №2, с.165;
2. «На том стоим!» – 2018, №5, с.26;
3. «Относительность движения в задачах динамики» – 2019, №4, с.40;
4. «Парадокс Вавилова» – 2020, №1, с. 59.

Материал подготовил А.Леоневич

Капля дождя

Р.КОРКИН

ЗАДАЧА ПРО ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ дождя уже рассматривалась в «Кванте» (1982, №4, с.31 и 2019, №12, с.26; автор публикаций – А.Стасенко), но несколько в другом аспекте. А именно, формулировка была следующей:

Пусть в облаке из микрокапель одна из них стала падать, поглощая на своем пути встречные капли. Каков закон движения падающей капли со временем?

Предполагалось, что движение капли установилось, но оно настолько медленное, что сопротивлением воздуха можно пренебречь. Изменение формы капли и ее распад на более мелкие при соударении исключались. Иными словами, уточнялась постановка задачи о капле, падающей и растущей в неподвижном тумане, ранее опубликованной в курсе теоретической физики А.Зоммерфельда («Механика»). И приводилось красивое и простое решение, дающее ответ: капля движется со средним ускорением $g/7$.

Однако постановка задачи о движении капли без учета силы сопротивления воздуха не позволяет исследовать динамику реальной капли. Поэтому кажется интересным рассмотреть задачу о движении капли с учетом силы сопротивления воздуха и поглощения на пути движения встречных капель (рис.1). Это позволит ответить на следующие вопросы: какова концентрация встречных капель в воздухе; какие типичные размеры имеют капли дождя; с какими максимальными скоростями они падают на поверхность Земли.

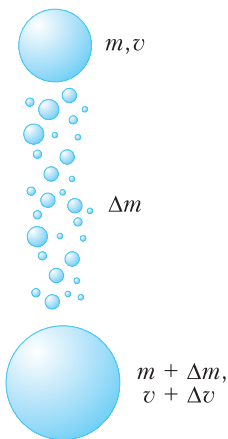


Рис. 1. Движение капли с поглощением встречных капель

Уравнение движения капли можно записать в виде

$$m\Delta v = mg\Delta t - F_c\Delta t - v\Delta m. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует ускорению капли в поле тяжести, второе учитывает сопротивление воздуха, а третье – потери импульса за счет слияния со встречными каплями. Сила сопротивления воздуха, вообще говоря, состоит из двух компонент: лобовое сопротивление и вязкое трение. Точные формулы выглядят следующим образом:

$$F_1 = C \frac{\rho_0 v^2}{2} \pi r^2,$$

$$F_2 = 6\pi\eta r v,$$

хотя по порядку величины эти обе компоненты могут быть оценены из соображений размерности. Здесь C – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, ρ_0 и η – плотность и вязкость воздуха. Аэродинамический коэффициент C зависит от геометрии тела, скорости движения, а также параметров воздуха и, вообще говоря, не является константой. Но для капли сферической формы в диапазоне малых скоростей будем использовать значение C порядка 0,5.

Подставляя выражения сил сопротивления в формулу (1), получим

$$m\Delta v = mg\Delta t - v\Delta m - \frac{C\rho_0 v^2}{2} \pi r^2 \Delta t - 6\pi\eta r v \Delta t. \quad (2)$$

Однако это уравнение слишком громоздкое для анализа. Давайте сначала изучим падение одинокой капли. Для этого опустим слагаемое, связанное со встречными каплями. Из уравнения понятно, что, начав падать, капля разгонится до некоторой предельной скорости, при которой сила тяжести будет уравновешена двумя силами сопротивления. Решение уравнения относительно скорости дает:

$$v = \sqrt{\left(\frac{6\eta}{C\rho_0 r}\right)^2 + \frac{8\rho g r}{3C\rho_0}} - \frac{6\eta}{C\rho_0 r}. \quad (3)$$

Результат отображен на рисунке 2. Интересно, что такое упрощенное рассмотрение дает зависимость максимальной скорости капли плотностью ρ от ее размеров, близкую к наблюдаемым значениям. Так, капли радиу-

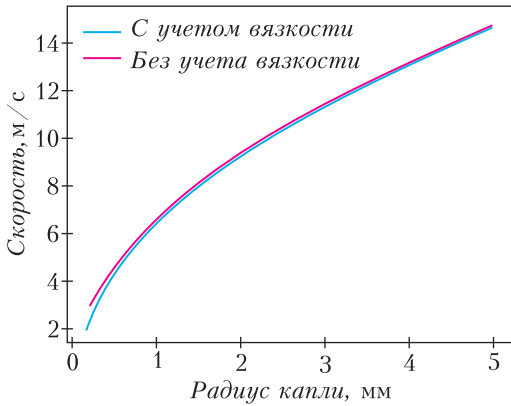


Рис. 2. Зависимость предельной скорости капли от ее радиуса

сом 0,3, 1 и 3 мм в действительности имеют максимальные скорости 2,5, 6,5 и 10 м/с соответственно (см., например, книгу: Б.Дж.Мейсон. Физика облаков. – Гидрометеиздат, 1961), а на графике это 3, 6,5 и 11 м/с. Заметим, что без учета вязкого трения значения скоростей несколько завышены лишь для капель радиусом менее 1 мм.

Понятно, что скорости действительно должны быть выше для крупных капель – сила тяжести растет с радиусом быстрее, чем силы сопротивления. Почему же в таком случае эта зависимость не распространяется и на более крупные капли? Ответ состоит в том, что наше приближение не работает, когда перепад давлений из-за сопротивления воздуха сопоставим с давлением поверхностного натяжения: $C\rho_0 v^2/2 \sim 2\sigma/r$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Вязкое трение здесь опущено, поскольку при больших скоростях лобовое сопротивление доминирует. Отсюда можно найти соотношение между критическими значениями радиуса и скорости капли:

$$v_{\text{кр}}^2 r_{\text{кр}} \sim \frac{4\sigma}{C\rho_0}. \quad (4)$$

Для капель с радиусом 5 мм критическая скорость равна 10 м/с. Таким образом, более крупные капли если и возникнут, то, разогнавшись до критической скорости, будут сначала деформированы, что увеличит их сопротивление, а затем разорваны на множество мелких капель, которые замедлятся, согласно кривой на рисунке 2.

Итак, мы не только выяснили диапазоны

скоростей капель дождя, но и узнали максимальный радиус капель.

Рассмотрим теперь уравнение (2) с учетом слияния капли со встречными. Как мы уже заметили выше, уравнение громоздко для анализа и хотелось бы его упростить. К счастью, для достаточно больших капель и не очень малых скоростей силой вязкого трения можно пренебречь. Действительно, рассмотрим каплю радиусом $r_0 = 0,5$ мм при скорости движения $v \sim 3$ м/с. Используя значения плотности и вязкости воздуха: $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$ и $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, имеем

$$F_1 \sim 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \gg F_2 \sim 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

Таким образом, для качественных оценок максимальных скоростей можно рассмотреть только силу лобового сопротивления.

Вычислим изменение массы капли за счет слияния. Масса встречных капель, собранная за время Δt , равна

$$\Delta m = \alpha \rho \pi r^2 v \Delta t, \quad (5)$$

где α – объемная концентрация капель в воздухе, т.е. объем водяных капель на единицу объема воздуха. Здесь мы предположили, что все капли, встречаемые по пути движения, будут поглощаться. Это не совсем верно, так как не учитываются отскоки капель, но для качественного рассмотрения этого достаточно. Считая капли шарообразными, из закона сохранения массы находим изменение радиуса:

$$4\pi r^2 \Delta r = \pi r^2 \alpha \Delta x.$$

Видно, что радиус растет линейно с пройденным путем. Принимая радиус капли в начальный момент за r_0 , получаем

$$r = r_0 + \frac{\alpha x}{4}. \quad (6)$$

С учетом уравнений (2), (5) и (6) перепишем дифференциальное уравнение для скорости:

$$dv = gdt - \frac{3}{4} \left(\alpha + \frac{C\rho_0}{2\rho} \right) \frac{v^2 dt}{r_0 + \alpha x/4}.$$

Интересно, что вклады слагаемых, соответствующих слиянию капель и силе сопротивления воздуха, имеют идентичные формы. Умножим уравнение на v , введем новую переменную $y = v^2/(2g)$ и произведем замену $dx = vdt$. Тогда выражение несколько упростится:

$$y' = 1 - \frac{ay}{x+b}.$$

Здесь введены параметры $a = 6 + 3C\rho_0/(\rho\alpha)$ и $b = 4r_0/\alpha$. Для того чтобы избавиться от знаменателя, ищем решение в виде $y = z(x+b)$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$z'(x+b) + z = 1 - az.$$

Отсюда находим

$$\frac{dz}{1 - (1+a)z} = \frac{dx}{x+b}.$$

Тем, кто умеет интегрировать, несложно увидеть, что и слева и справа при интегрировании получается натуральный логарифм. Вычислив экспоненты левой и правой частей, получим ответ для функции z :

$$z = \frac{1}{a+1} - \frac{A}{(x+b)^{a+1}},$$

где A – константа интегрирования.

Решение для y запишем в виде

$$y = \frac{x+b}{a+1} - \frac{A}{(x+b)^a}.$$

Полагая начальную скорость капли равной нулю (или $y(0) = 0$), вычислим константу A :

$$0 = \frac{b}{a+1} - \frac{A}{b^a}, \quad A = \frac{b^{a+1}}{a+1}.$$

Теперь выражение для v^2 выглядит следующим образом:

$$v^2 = \frac{8gr_0(1 + \alpha x/(4r_0))}{7\alpha + 3C\rho_0/\rho} \times \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha x/(4r_0))^{7+3C\rho_0/(\alpha\rho)}} \right). \quad (7)$$

Эта общая формула содержит в себе несколько интересных предельных случаев.

1. Сопротивление воздуха и концентрация встречных капель пренебрежимо малы (положим $C \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$). Тогда уравнение (7) упрощается:

$$v^2 = 2gx.$$

Это обычный закон падения капли в поле тяжести в отсутствие сопротивления воздуха, чего и следовало ожидать.

2. Сопротивление воздуха также отсут-

ствует ($C = 0$), но концентрация встречных капель достаточно высокая (радиус нашей капли существенно увеличивается, но $\alpha \gg 4r_0/x$). Тогда

$$v^2 = \frac{2gx}{7},$$

т.е. капля падает с ускорением $g/7$, что согласуется с ответом в вышеупомянутых материалах «Кванта».

3. Сопротивление воздуха присутствует, но нет встречных капель ($C = 0,5$, $\alpha \rightarrow 0$). Этот случай соответствует движению одиночной капли в поле тяжести с учетом сопротивления воздуха. С помощью некоторых алгебраических преобразований формула (7) может быть переписана в виде

$$v^2 = \frac{8\rho gr_0}{3C\rho_0} \left(1 - e^{-3C\rho_0 x/(4\rho r_0)} \right). \quad (8)$$

Экспоненциальное выражение в скобке стремится к нулю с увеличением пройденного пути, и скорость капли стабилизируется. Интересно, что весь разгон у одиночной капли занимает всего несколько метров или десятков метров: $L \sim 4\rho r_0/(3C\rho_0) = 11$ м для капли радиусом 0,5 мм. Асимптотически формула (8) стремится к формуле (3), если положить в ней вязкость равной нулю.

Для количественного анализа нам не хватает знаний о параметре α . Концентрация встречных капель определяется количеством сконденсированного водяного пара. Конденсация в облаке происходит за счет перемещения теплых воздушных масс в область более низких температур. Вариации температуры на интересующих нас высотах (до нескольких километров) составляют 10–20 градусов при самой температуре порядка -20 °С. В таком случае плотность капель – так называемая водность – есть разница плотностей насыщенных паров воды, которая колеблется в широких пределах от сотых долей до 3–4 г/м³. Поскольку водность, или массовое водосодержание, w связана с объемным водосодержанием соотношением $w = \alpha\rho$, то α изменяется от 10^{-8} до значений порядка $(3-4) \cdot 10^{-6}$. Можно заметить, что при реальном коэффициенте сопротивления $C \sim 0,5$ вклад слияния капель в знаменатель формулы (7) незначителен: $7\alpha \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll C\rho_0/\rho \approx$

$\approx 6 \cdot 10^{-4}$ даже для очень высоких значений водности облака ($\alpha \sim 4 \cdot 10^{-6}$).

Однако учет слияния капель дает интересный эффект по крайней мере для высоких значений $\alpha x / (4r_0)$, т.е. при высоких значениях водности ($\alpha \sim 4 \cdot 10^{-6}$), для крупных облаков (4 км). В этом случае формула (7) упрощается до выражения

$$v^2 = \frac{2gx}{7 + 3C\rho_0/(\alpha\rho)} \quad (9)$$

Мы снова получили равноускоренное движение, несмотря на силу трения! Физически это возможно благодаря сильному увеличению радиуса капли по ходу движения ($\alpha H / (4r_0) \sim 4$). Сила сопротивления растет пропорционально второй степени, а сила тяжести – третьей степени радиуса, который сам по себе растет со временем, позволяя капле двигаться с небольшим ускорением. Ускорение при этом не зависит от размеров капли и составляет примерно $0,002g$. Достигнув Земли, радиус капли увеличится на $\alpha H / 4 = 4$ мм, а ее скорость составит 13 м/с. Однако, этот ответ несколько завышен даже для начального радиуса 0,5 мм, так как при полном радиусе 4,5 мм начиная со скорости 10,2 м/с капля теряет сферичность согласно формуле (4).

Но можно задаться вопросом о максимальной скорости капли меньшего размера в случае высокой водности. Возможно, такие капли смогут преодолеть барьер, указанный в формуле (3)? Ответ отрицателен: равноускоренное движения в облаке высокой водности (9) лишь соответствует более плавному разгону, нежели согласно (8). Конечные скорости все равно ограничены формулами (3) вплоть до значений скорости (4). Действительно, правая часть формулы (9) может быть переписана так:

$$\begin{aligned} \frac{2gx}{7 + 3C\rho_0/(\alpha\rho)} &\approx \frac{2g(\alpha x/4)}{7\alpha/4 + 3C\rho_0/(4\rho)} \approx \\ &\approx \frac{2gr}{7\alpha/4 + 3C\rho_0/(4\rho)} \approx \frac{8\rho gr}{3C\rho_0} \end{aligned}$$

Напоследок давайте оценим концентрацию капель в облаке и среднее расстояние между каплями. Поскольку коэффициент

$\alpha \leq 4 \cdot 10^{-6}$, а типичные размеры капель в облаке оценивались выше в десятые и сотые доли миллиметров, то концентрация капель получается порядка $10^{-8} - 10^{-7}$ на кубический метр, а расстояние между каплями составляет сантиметры.

Стоит заметить, что физика капли дождя интересна и многогранна и не исчерпывается описанными выше явлениями. Здесь не были рассмотрены, например, эффекты роста капель из зародышей, влияние заряда на слияние капель при падении, возможное испарение капли по ходу движения или замерзание с образованием кристалликов льда и так далее.

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры

г. Москва, м. Лубянка, ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

www.biblio-globus.ru

Две задачи о покрытии доски уголками

А.КАНУННИКОВ

ОДНА ИЗ РАСПРОСТРАНЕННЫХ кружковых тем – замощения, разрезания, раскраски. Типичная задача на эту тему формулируется так: «Можно ли данную фигуру, состоящую из клеток, разрезать на фигурки данного вида?» (см., например, [1]). В этой статье мы решим две схожие исследовательские задачи о покрытии прямоугольной доски уголками.

Задача 1. Доски каких размеров $m \times n$ можно разрезать на уголки из трех клеток?

Очевидно, что число клеток mn должно быть кратно 3, а значит, m или n кратно 3. Рассмотрим близкую задачу, в которой это ограничение снимается.

Задача 2. Доски каких размеров $m \times n$ можно покрыть уголками из трех клеток равномерно в несколько слоев? (Каждая клетка покрывается одним и тем же числом уголков.)

В ответе к этой задаче m и n уже могут быть не кратны 3 (в этом случае число слоев будет кратно 3). Интересное решение задачи 2 для доски 5×7 автор увидел в книжке [2], когда был школьником. Догадаться до этого решения весьма не просто.

Решение задачи 1

Будем считать, что m кратно 3. Начнем со случая $m = 3$. При $n = 2$ получаем прямоугольник 3×2 , который разрезается на два уголка. Исследуем общий случай доски $3 \times n$ при $n > 1$. Ее левую верхнюю клетку можно

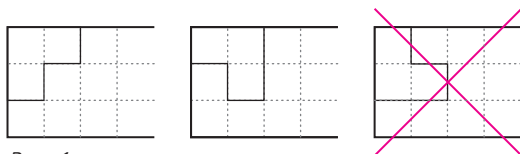


Рис. 1

покрыть уголком двумя способами (рис. 1) – в обоих случаях однозначно ставится еще один уголок снизу и эти два уголка образуют прямоугольник 3×2 . К оставшейся доске $3 \times (n - 2)$ применяем то же рассуждение и получаем, что

доска $3 \times n$ разрезается на уголки $\Leftrightarrow n$ четно. (1)

Далее возьмем $m = 6$. Доски 6×2 и 6×3 можно разрезать на блоки 3×2 , а значит – и на уголки (рис. 2). Отсюда ясно, что

доска $6 \times n$ разрезается на уголки при любом $n > 1$. (2)

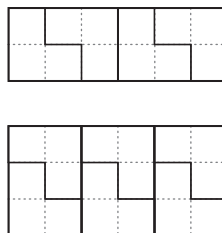


Рис. 2

Действительно, при четном n такая доска разрезается на доски 6×2 , а при нечетном n – на одну доску 6×3 и $(n - 3)/2$ досок 6×2 .

Осталось исследовать доски с нечетными $m, n > 3$, где m кратно 3. Наименьшие значения: $m = 9$ и $n = 5$. На разрезание доски 9×5 может уйти много неудачных попыток. В решении поможет раскраска доски, показанная на рисунке 3. Ясно, что каждый уголок покрывает не более чем одну зеленую клетку. С другой стороны, зеленых клеток 15 – столько же, сколько должно быть уголков. Значит, в каждом уголке должно быть по

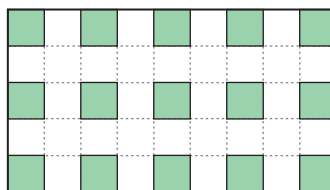


Рис. 3

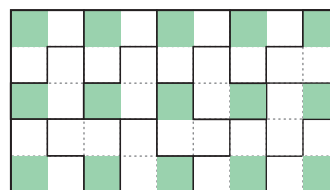


Рис. 4

зеленой клетке. Одно из разрезов показано на рисунке 4. Отсюда следует, что

любая доска $m \times n$ с нечетными $m, n > 3$, где m кратно 3, разрезается на уголки. (3)

Действительно, достаточно отпилить от такой доски доску $9 \times n$ и остаток разрезать на доски $6 \times n$ (всякое нечетное $m > 3$, кратное 3, представляется в виде $9 + 6 + \dots + 6$). Доски $6 \times n$ разрезаются в силу (2), а доска $9 \times n$ разбивается в соответствии с разбиением $n = 5 + 2 + \dots + 2$; доски 9×2 разрезаются на три блока 3×2 , а доску 9×5 мы только что разрезали.

Решение задачи 1 заключено в утверждениях (1)–(3). Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 1. Доска $m \times n$ разрезается на уголки в следующих случаях и только в них:
 1) mn кратно 6 и $m, n > 1$;
 2) mn кратно 3, m и n нечетны и больше 3.

Решение задачи 2

Прежде всего отметим, что любое покрытие одним слоем можно наслаивать многократно (столько раз, сколько нужно). Далее, помимо блока 2×3 у нас появляется еще блок 2×2 : такой квадратик покрывается четырьмя уголками в три слоя (рис. 5).

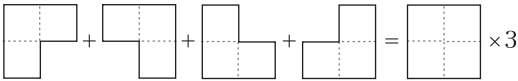


Рис. 5

Прямоугольниками 2×3 и 2×2 можно покрыть любую полосу $2 \times n$, а тогда и любую доску $2k \times n$. Итак,

доска $m \times n$, где mn четно ($m, n > 1$), равномерно покрывается уголками. (4)

Осталось исследовать доски с нечетными m и n . Как и в задаче 1, начнем со случая $m = 3$. Это первый нетривиальный случай, когда доказать невозможность покрытия не так просто. Пусть $n = 2k - 1$. Воспользуемся уже знакомой нам раскраской на рисунке 6 и расставим в зеленые клетки число 2, а в белые число -1 . Сумма всех чисел равна

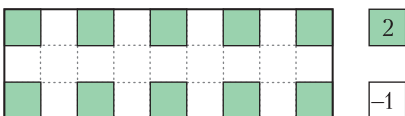


Рис. 6

$2 \cdot 2k - (3(2k - 1) - 2k) = 3$. Предположим, что доску $3 \times (2k - 1)$ удалось покрыть уголками в N слоев. Рассмотрим сумму S чисел во всех уголках. С одной стороны, она равна сумме чисел во всех слоях, т. е. $3N$. С другой, в каждом уголке сумма чисел равна либо -3 , либо 0 , во всяком случае неположительна. Таким образом, $S = 3N \leq 0$ – противоречие. Мы доказали, что

доски $3 \times (2k - 1)$ нельзя равномерно покрыть уголками. (5)

Этот трюк с хитроумной расстановкой чисел произвел на меня сильное впечатление, когда я впервые, будучи школьником, увидел решение этой задачи для доски 5×7 в книжке [2]. Я решил посмотреть, на какие доски $(2k - 1) \times (2l - 1)$ обобщается это рассуждение. Зеленых клеток на такой доске ровно kl , поэтому сумма чисел для такой доски равна

$$S = 2kl - (2k - 1)(2l - 1) + kl = -kl + 2k + 2l - 1,$$

что почти всегда отрицательно: произведение kl имеет «большой вес», чем $2k + 2l - 1$. Это не удивительно: зеленые клетки составляют примерно четверть на большой доске: на каждую двойку приходится три минуса единицы. Выясним, когда все же S положительно. Нас интересуют не слишком узкие доски: $k, l > 2$, иначе один из размеров доски равен 3 – такие случаи мы уже изучили (см. (5)). При $k \geq l \geq 3$ имеем

$$S > 0 \Leftrightarrow (k - 2)(l - 2) < 3 \Leftrightarrow (k, l) \Leftrightarrow (3, 3), (4, 3).$$

Таким образом,

доски 5×5 и 5×7 нельзя равномерно покрыть уголками. (6)

Отметим, что для доски 5×9 сумма S оказывается равной 0, поэтому в каждом уголке сумма должна равняться 0, т. е. в каждом уголке должна быть зеленая клетка. Так оно и есть – мы уже замочали доску 5×9 в один слой (см. рис. 4). Теперь легко покрыть доску $5 \times (9 + 2t)$: отдельно покрываем доску 5×9 и t досок 5×2 (и уравниваем число слоев). Итак,

доски $5 \times n$ равномерно покрываются уголками при любом нечетном $n > 9$. (7)

К выводам (5) и (6) можно прийти, используя только раскраску с зелеными клет-

ками, не расставляя числа. Рассмотрим, к примеру, доску 5×7 . Пусть ее можно покрыть уголками в N слоев. Тогда число зеленых клеток во всех слоях равно $12N$, а число уголков равно $35N/3$. Но в каждом уголке – не более одной зеленой клетки, значит, уголков не больше, чем зеленых клеток (по всем слоям), т.е. $12N < 35N/3$ – противоречие. Это решение рассказала преподаватель Малого мехмата Марина Молчанова.

Особого внимания заслуживает доска 7×7 . Если мы научимся покрывать ее, то

сможем покрыть вообще все не рассмотренные ранее доски $(7 + 2p) \times (7 + 2t)$. (8)

Достаточно показать, что, вырезав любую клетку доски 7×7 , мы сможем покрыть оставшуюся часть уголками в один слой. В самом деле, наложив друг на друга все 49 таких покрытий, мы покроем доску 7×7 в 48 слоев! Конечно, примеры покрытий достаточно привести не для 49 клеток, а всего для 10 – они отмечены на рисунке 7, любая

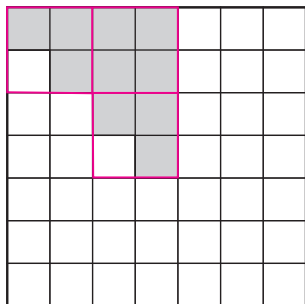


Рис. 7

другая клетка переводится в одну из отмеченных поворотом или отражением доски. Каждая из 10 клеток, отмеченных на рисунке 7, попадает в один из квадратов 2×2 , выделенных красным. После вырезания клетки такой квадрат сам становится уголком, а как разрезать оставшуюся часть доски, показано на соответствующем из рисунков 8, а-в.

Суммируя утверждения (4)–(8), получаем следующую теорему.

Теорема 2. Доска $t \times n$ равномерно покрывается уголками в следующих случаях и только в них:

- 1) tn четно и $t, n > 1$;
- 2) t, n нечетны и больше 3, кроме досок 5×5 и 5×7 .

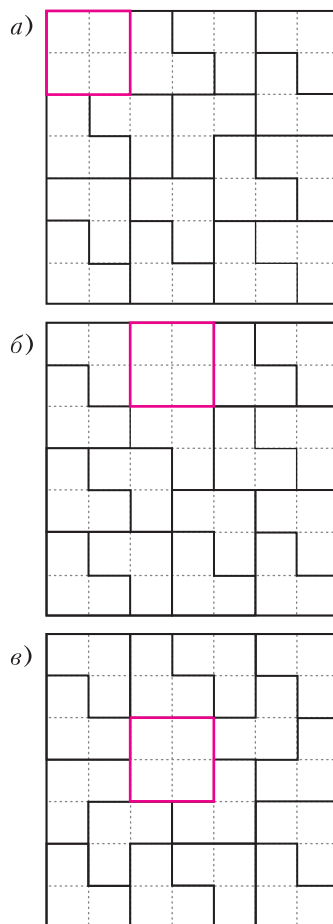


Рис. 8

Литература

1. С. Табачников, Д. Фукс. Невозможные замощения. – «Квант», 2011, №2.
2. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решать нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2008.
3. П. А. Кожевников. Замощения: от шахматной раскраски до диаграмм Ван-Кампена и групп Конвея. – Материалы ЛШСМ-2013, <https://www.mccme.ru/dubna/2013/courses/kozhevnikov.htm>

ФИЗИКО- математическая олимпиада «Физтех»

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1 (3 балла). Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2 (5 баллов). Решите уравнение

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

3 (5 баллов). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4 (5 баллов). Сфера с центром O вписана в трехгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трехгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трехгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трехгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5 (5 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6 (6 баллов). а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7 (6 баллов). Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}, \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Вариант 2

1 (3 балла). Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орел выпадет не меньше 55 раз, а q – вероятность того, что орел выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

2 (5 баллов). Решите уравнение

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}.$$

3 (5 баллов). Решите неравенство

$$27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4 \log_3 x} + 40x\sqrt{\log_3 3} \leq 48.$$

4 (5 баллов). а) Сфера с центром O касается боковых ребер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается ее основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 5, $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите

площадь треугольника KLM .

б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 36$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объем пирамиды $SABC$.

5 (6 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6 (5 баллов). а) Две параллельные прямые l_1 и l_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой l_1 в точке D ,

пересекает прямую l_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми l_1 и l_2). Известно, что отношение площади четырехугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.

7 (6 баллов). Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 60^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трех слагаемых.

Избранные задачи для 10 класса

1. Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все ее члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все ее члены, стоящие на четных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

2. По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $A(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

3. а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

4. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5\right)\left|x^3 - 7x^2 + 13x - 3\right| \leq 0.$$

5. Решите уравнение

$$5x^4 + x^2 + 8x - 6x^2|x + 4| + 16 = 0.$$

ФИЗИКА

9 класс

Вариант 1

1. Корабль A и торпеда B в некоторый момент времени находятся на расстоянии $l = 1$ км друг от друга (рис. 1). Скорость корабля $v_1 = 10$ м/с, угол $\alpha = 60^\circ$. Скорость торпеды $v_2 = 10$ м/с. Угол β таков, что торпеда попадет в цель.

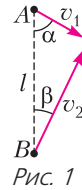


Рис. 1

1) Найдите $\sin \beta$.

2) Через какое время T расстояние между кораблем и торпедой составит $s = 770$ м?

2. Плоский склон горы образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Из миномета, расположенного на склоне, производят выстрел под таким углом φ к поверхности склона, что продолжительность (по времени) полета мины наибольшая. Мина падает на склон на расстоянии $s = 0,8$ км от точки старта.

1) Под каким углом φ к поверхности склона произведен выстрел?

2) Найдите величину v_0 начальной скорости мины.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

3. Вниз по шероховатой наклонной плоскости равнозамедленно движется брусок. В тот момент, когда скорость бруска равна $v_1 = 1$ м/с, на брусок падает пластилиновый шарик и прилипает к нему, а брусок останавливается. Движение шарика до соударения – свободное падение с высоты $h = 0,8$ м с нулевой начальной скоростью.

1) Найдите скорость v_2 шарика перед соударением.

2) Найдите величину a ускорения бруска перед соударением.

Массы бруска и шарика одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Быстрые процессы торможения бруска и деформации пластилина заканчиваются одновременно. В этих процессах действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

4. Два свинцовых шарика одинаковой массы, летящие со скоростями $v_1 = 60$ м/с и $v_2 = 80$ м/с, слипаются в результате абсолютно неупругого удара. Скорости шариков перед слипанием взаимно перпендикулярны.

1) С какой по величине скоростью v движутся слипшиеся шарики?

2) На сколько (Δt , °С) повысится температура шариков?

Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · °С). Температуры шариков перед слипанием одинаковы.

5. Четыре резистора соединены, как показано на рисунке 2. Сопротивления резисторов: $R_1 = 3r$, $R_2 = R_3 = 2r$, $R_4 = 4r$.

На вход AB схемы подают напряжение $U = 38$ В, $r = 10$ Ом.

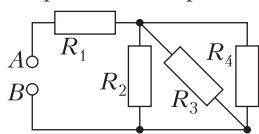


Рис. 2

1) Найдите эквивалентное сопротивление R_{AB} цепи.

2) Какой силы I ток будет течь через резистор сопротивлением R_4 ?

Вариант 2

1. Однородное колесо радиусом $R = 0,5$ м катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности и за время $T = 1,57$ с совершает один оборот. Точки A и B лежат на ободе колеса, AB – диаметр колеса.

1) С какой скоростью v_0 движется ось колеса?

2) С какой скоростью v_A движется точка A на ободе колеса, если точка B движется со скоростью $v_B = 2$ м/с?

Все скорости измерены в лабораторной системе отсчета. Ось колеса движется равномерно.

2. Мяч, отбитый теннисистом на высоте $h = 0,5$ м, поднимается на максимальную высоту $H = 3$ м и за оставшееся время полета перемещается по горизонтали на $s = 12$ м.

1) Через какое время T после удара мяч поднимется на максимальную высоту?

2) Найдите начальную скорость v_0 мяча.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

3. Чтобы спускать брусок равномерно по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, следует приложить силу F_1 , направленную вверх вдоль наклонной плос-

кости, а чтобы равномерно втаскивать брусок вверх, следует приложить такую же по направлению силу F_2 .

1) Найдите коэффициент μ трения скольжения бруска по плоскости, если $F_2 = 2F_1$.

2) Какую по величине v_0 скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, следует сообщить бруску, чтобы он остановился на расстоянии $s = 1,35$ м от точки старта?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. Две шайбы, скорости которых $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 3$ м/с, движутся навстречу друг другу по гладкой горизонтальной плоскости и испытывают абсолютно упругий центральный удар. Массы шайб $m_1 = 0,3$ кг и $m_2 = 0,2$ кг.

1) Найдите максимальную энергию E деформации шайб в процессе соударения.

2) Через какое время T после соударения расстояние между шайбами будет равно $L = 2$ м?

5. Электрическая цепь состоит из идеального источника постоянного напряжения и четырех резисторов (рис.3). Если к клеммам A и B подключить идеальный вольтметр, то он покажет напряжение $U = 4$ В. Если вольтметр заменить идеальным амперметром, он покажет силу тока $I = 30$ мА.

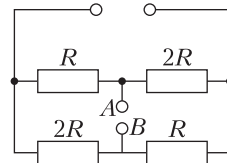


Рис. 3

1) Найдите напряжение U_0 источника.

2) Какая мощность P будет рассеиваться в цепи при подключенном вольтметре?

10 класс

Вариант 1

1. Камень бросают с вышки со скоростью $v_0 = 8$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. В полете камень все время приближался к горизонтальной поверхности земли и упал на нее со скоростью $2,5v_0$.

1) Найдите вертикальную компоненту скорости камня при падении на землю.

2) Найдите время полета камня.

3) Найдите горизонтальное смещение камня за время полета.

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Человеку, упирающемуся в ящик ногами, надо передвинуть ящик из состояния

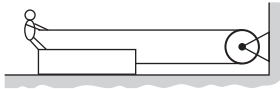


Рис. 4

покоя по горизонтальному полу на расстояние s к стене (рис.4). Массы человека и ящика равны m и $M = 5m$ соответственно. Натянутые части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массами каната, блока и трением в оси блока можно пренебречь. Коэффициент трения между ящиком и полом μ .

1) С какой силой ящик с человеком давят на пол при движении ящика?

2) С какой минимальной постоянной силой F_0 надо тянуть человеку канат, чтобы осуществить задуманное?

3) Какой скорости достигнет ящик, если человек осуществит задуманное, приложив постоянную силу F ($F > F_0$) к канату?

3. Однородный шар массой m и радиусом R находится на гладкой поверхности клина,

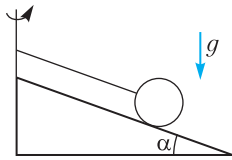


Рис. 5

наклоненной под углом α к горизонту (рис.5). Шар удерживается нитью длиной L , привязанной к вертикальной оси, проходящей через вершину клина. Нить параллельна поверхности клина.

1) Найдите силу натяжения нити, если система покоится.

2) Найдите силу натяжения нити, если система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину клина, а шар не отрывается от клина.

4. Трубка, изогнутая под прямым углом, расположена в вертикальной плоскости и

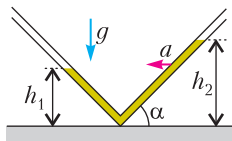


Рис. 6

заполнена маслом (рис.6). Угол $\alpha = 45^\circ$. При равноускоренном движении трубки в горизонтальном направлении уровни масла в коленах трубки устанавливаются на высотах $h_1 = 8$ см и $h_2 = 12$ см.

1) Найдите ускорение a трубки.

2) С какой максимальной скоростью v будет двигаться жидкость относительно трубки после того, как трубка внезапно станет двигаться равномерно (ускорение «исчезнет»)?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Действие сил трения пренебрежимо мало.

5. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар при температуре 95°C и давлении $p = 8,5 \cdot 10^4$ Па. В медленном изотермическом процессе уменьшения объема пар начинает конденсироваться, превращаясь в воду.

1) Найдите отношение плотности пара к плотности воды в условиях опыта.

2) Найдите отношение объема пара к объему воды к моменту, когда объем пара уменьшится в $\gamma = 4,7$ раза.

Плотность и молярная масса воды $\rho = 1$ г/см³ и $M = 18$ г/моль.

Вариант 2

1. Мальчик бросает стальной шарик с вышки со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В полете шарик все время приближался к горизонтальной поверхности земли и упал на нее со скоростью $2v_0$.

1) Найдите вертикальную компоненту скорости шарика при падении на землю.

2) Найдите время полета шарика.

3) С какой высоты был брошен шарик?

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать.

2. На противоположных концах тележки массой M , находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, стоят два ученика одинаковой массы m каждый. Длина тележки L . Вначале система неподвижна. Один ученик бросает мяч, а другой ловит. Масса мяча m_1 . В процессе полета горизонтальная составляющая скорости мяча относительно поверхности, на которой находится тележка, равна v_0 .

1) Найдите скорость v_1 тележки после броска.

2) Найдите продолжительность T полета мяча.

3) Найдите скорость v_2 тележки после того, как второй ученик поймает мяч.

Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

3. Однородный шар массой m находится на гладкой поверхности клина, наклоненной под углом α к горизонту (рис.7). Шар удерживается горизонтально натянутой нитью длиной L , привязанной к вершине клина.

1) Найдите силу натяжения нити, если система покоится.

2) Найдите силу натяжения нити, если система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину клина.

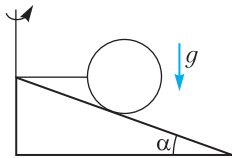


Рис. 7

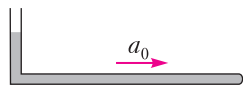


Рис. 8

4. Тонкая Г-образная трубка с горизонтальным коленом, закрытым с одного конца, и вертикальным коленом высотой $H = 40$ мм, открытым в атмосферу, заполнена полностью ртутью (рис.8). Если трубку двигать (в плоскости рисунка) с ускорением, не большим некоторого a_0 , то ртуть из трубки не выливается.

1) Найдите давление p_1 внутри трубки в точке А, находящейся от вертикального колена на расстоянии $1/3$ длины горизонтального колена, если трубка движется с ускорением a_0 .

2) Найдите давление p_2 в точке А, если трубка движется с ускорением $0,6a_0$.

3) Найдите давление p_3 вблизи закрытого конца трубки, если она движется с ускорением $0,8a_0$.

Атмосферное давление $p_0 = 740$ мм рт. ст. Давлением насыщенных паров ртути в условиях опыта пренебречь. Ответы дать в мм рт. ст.

5. Поршень делит объем горизонтального герметичного цилиндра на две равные части, в каждой из которых находятся вода и водяной пар при температуре $T = 373$ К. Масса воды в каждой части в 5 раз меньше массы пара. Поршень находится на расстоянии $L = 0,6$ м от торцов, площадь поперечного сечения поршня $S = 20$ см². Масса M поршня такова, что $\frac{Mg}{S} = 0,01p_0$, где p_0 – нормальное атмосферное давление.

1) Найдите массу m воды в каждой части в начальном состоянии.

2) Цилиндр ставят на дно. Найдите вертикальное перемещение h поршня к моменту установления равновесного состояния.

Температура в цилиндре поддерживается постоянной. Трение считайте пренебрежимо малым. Молярная масса водяного пара

$M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К). Объем воды намного меньше объема пара.

11 класс

Вариант 1

1. Муфту M двигают со скоростью $v = 68$ см/с по горизонтальной направляющей AB (рис.9). Кольцо K массой $m = 0,1$ кг

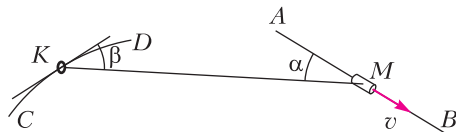


Рис. 9

может двигаться без трения по проволоке CD в виде дуги окружности радиусом $R = 1,9$ м. Кольцо и муфта связаны легкой нитью длиной $l = 5R/3$. Система находится в одной горизонтальной плоскости. В некоторый момент нить составляет угол α ($\cos \alpha = 15/17$) с направлением движения муфты и угол β ($\cos \beta = 4/5$) с направлением движения кольца.

1) Найдите скорость кольца в этот момент.

2) Найдите скорость кольца относительно муфты в этот момент.

3) Найдите силу натяжения нити в этот момент.

2. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры, изобары и участка прямой пропорциональной зависимости давления p от объема V (рис.10). Рабочее вещество – одноатомный идеальный газ.

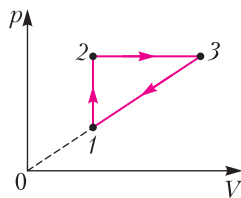


Рис. 10

1) Найдите отношение молярных теплоемкостей на тех участках цикла, где происходило повышение температуры газа.

2) Найдите в изобарном процессе отношение количества теплоты, полученного газом, к работе газа.

3) Найдите предельно возможное максимальное значение КПД такого цикла.

3. Обкладки конденсатора – круглые металлические сетки площадью S , расстояние между обкладками d ($d \ll \sqrt{S}$). Из точки, находящейся между обкладками на оси симметрии на расстоянии $0,25d$ от положительно заряженной обкладки, стартует с нулевой начальной скоростью положительно заряженная частица и через время T вылетает из

конденсатора перпендикулярно обкладкам. Удельный заряд частицы $\frac{q}{m} = \gamma$. Система находится в вакууме.

1) Найдите скорость v_1 частицы при вылете из конденсатора.

2) Найдите величину Q заряда обкладок конденсатора.

3) С какой скоростью v_2 будет двигаться частица на бесконечно большом расстоянии от конденсатора?

При движении частицы электрическое поле, созданное зарядами конденсатора, считать неизменным, а электрическое поле внутри конденсатора вблизи оси симметрии считать однородным.

4. В цепи, схема которой показана на рисунке 11, а, ключ разомкнут, ЭДС идеального источника $\mathcal{E} = 9$ В, конденсатор емкостью

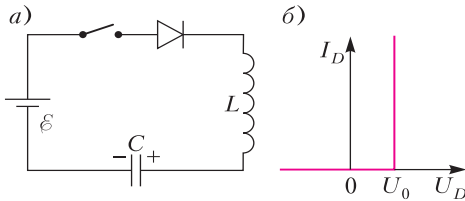


Рис. 11

заряден до напряжения $U_1 = 5$ В, индуктивность идеальной катушки $L = 0,1$ Гн. Вольт-амперная характеристика диода дана на рисунке 11, б, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В. Ключ замыкают.

1) Найдите скорость возрастания тока сразу после замыкания ключа.

2) Найдите максимальный ток после замыкания ключа.

3) Найдите установившееся напряжение U_2 на конденсаторе после замыкания ключа.

5. Оптическая система состоит из тонкой линзы с фокусным расстоянием F , плоского зеркала и небольшого экрана \mathcal{E} , расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (рис. 12). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси OO_1 линзы. Источник S находится на расстоянии

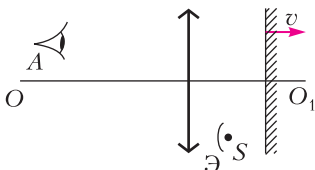


Рис. 12

$3F/4$ от оси OO_1 и на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью v вдоль оси OO_1 . В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

1) На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель A сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?

2) Под каким углом α к оси OO_1 движется изображение в этот момент? (Найдите значение любой тригонометрической функции угла.)

3) Найдите скорость изображения в этот момент.

Вариант 2

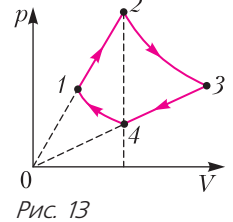
1. Шарик подвешен в поле тяжести на легкой упругой пружине с неизвестной жесткостью. Шарик поднимают вверх до положения, когда пружина не деформирована, и отпускают. При дальнейшем движении шарика вдоль вертикали в некоторые моменты времени силы, действующие на шарик со стороны пружины, отличаются в 2 раза, а модули ускорений равны.

1) Найдите модуль ускорения в эти моменты.

2) Найдите отношение кинетических энергий шарика в эти моменты.

3) Найдите отношение максимальной энергии деформации пружины к максимальной кинетической энергии шарика.

2. Идеальный одноатомный газ из состояния 1 с температурой T_1 расширяется в процессе 1–2 прямой пропорциональной зависимости давления p от объема V (рис. 13). В процессе 1–2 давление увеличивается в $k = 2$ раза. Затем газ расширяется в изотермическом процессе 2–3, сжимается в процессе 3–4 прямой пропорциональной зависимости давления от объема и сжимается в изотермическом процессе 4–1. Объемы газа в состояниях 2 и 4 равны.



1) Найдите температуру газа в процессе 2–3.

2) Найдите отношение давлений в состояниях 1 и 3.

3) Найдите молярную теплоемкость газа в процессе 1–2.

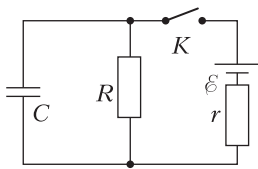


Рис. 14

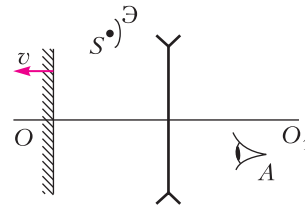


Рис. 16

3. В электрической цепи (рис.14) все элементы идеальные, конденсатор не заряжен. Величины ε , R , C известны, $r = R$. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем размыкают, когда скорость роста энергии конденсатора максимальна.

- 1) Найдите ток, текущий через конденсатор, сразу после замыкания ключа.
- 2) Найдите ток, текущий через конденсатор, сразу после размыкания ключа.
- 3) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

4. В цепи используется мостовая схема (рис.15,а). ЭДС идеального источника

5. Оптическая система состоит из тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$), плоского зеркала и небольшого экрана Э, расположенного так, что свет от источника S может попасть на линзу только после отражения от зеркала (рис.16). Зеркало расположено перпендикулярно главной оптической оси линзы OO_1 . Источник S находится на расстоянии $3F/4$ от оси OO_1 и на расстоянии $F/2$ от плоскости линзы. Линза и источник неподвижны, а зеркало движется со скоростью v вдоль оси OO_1 . В некоторый момент зеркало оказалось на расстоянии F от линзы.

- 1) На каком расстоянии от плоскости линзы наблюдатель A сможет увидеть в этот момент изображение источника в системе?
- 2) Под каким углом α к оси OO_1 движется изображение в этот момент? (Найдите значение любой тригонометрической функции угла.)
- 3) Найдите скорость изображения в этот момент.

Публикацию по математике подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, А.Головко, С.Городецкий, В.Дубинская, Ю.Кузьменко, Е.Молчанов, О.Подлипский, Д.Терёшин; по физике – Л.Колдунов, В.Плис, В.Усков, В.Чивилёв, А.Шеронов, Ю.Юрьев

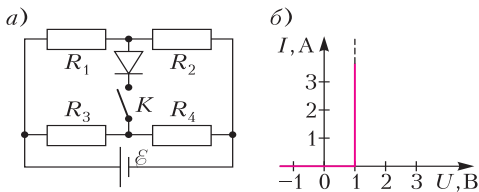


Рис. 15

$\varepsilon = 10$ В, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 2$ Ом. Вольт-амперная характеристика диода показана на рисунке 15,б, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В.

- 1) Найдите ток через резистор сопротивлением R_3 при разомкнутом ключе K .
- 2) При каких значениях R_1 ток потечет через диод при замкнутом ключе K ?
- 3) При каком значении R_1 мощность тепловых потерь на диоде будет равна $P_D = 1,25$ Вт?

Вниманию наших читателей

Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>



Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 100 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт.

Обучение в школе ведется по четырем предметам научно-технической направленности – физике, математике, информатике и химии. В 8 классе изучаются только физика и математика. В 9–11 классах к этим предметам добавляются математические основы информатики и ИКТ (информатика) и химия. Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два, три или четыре предмета.

Количество заданий в год по классам и предметам представлено в таблице:

	Физика	Математика	Информатика	Химия
8 класс	5	6		
9 класс	6	7	4	4
10 класс	6	7	4	4
11 класс	6	8	5	4

Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики, высшей математики и департамента химии МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренны-

ми школьниками. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 10–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными общеразвивающими программами и едины для всех отделений.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2021/22 учебный год проводится на заочное, очное и очно-заочное отделения.

Полная программа обучения рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

Согласно положению о ЗФТШ учащийся может обучаться *только на одном отделении ЗФТШ*.

Учащиеся всех отделений, успешно справившиеся с программой ЗФТШ, по окончании 11 класса получают свидетельство с итоговыми оценками по изучавшимся в 11-м классе предметам. При поступлении в МФТИ свидетельство об окончании ЗФТШ будет учитываться в первую очередь в ранжировании при прочих равных условиях.

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ – 2022», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в феврале или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает online-лекторий по физике, математике и химии по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ.

Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение на заочном или очно-заочном отделении.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ (*индивидуальное заочное обучение*)

Телефон: (495) 408-51-45,

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по выбранным для изучения предметам.

Школьники, поступающие на заочное отделение, выполняют вступительное задание на сайте <https://zftsh.online> в формате онлайн-олимпиады.

Олимпиада стартует 22.03.2021 в 9.00 и закончится 28.03.2021 в 21.00 (время московское).

На выполнение заданий по каждому предмету дается 4 часа.

Решение приемной комиссии будет сообщено до 1 июня 2021 года по указанному при регистрации адресу электронной почты. Также в личном аккаунте появится справка о зачислении в ЗФТШ.

При регистрации на <https://zftsh.online> необходимо прикрепить хорошо читаемую копию справки из школы.

Внимание школьников, уже обучающихся на заочном отделении ЗФТШ

Если школьник уже обучается в ЗФТШ и хочет добавить на следующий год еще предмет, необходимо с 22.03.21 по 28.03.21 выполнить на сайте <https://zftsh.online> вступительное задание по этому предмету. Выполнить вступительное задание нужно из своего уже имеющегося аккаунта. *Еще раз регистрироваться не надо.*

Решение приемной комиссии в таких случаях не высылается, а справка о добавлении предмета и задания по нему становятся доступными ученику в личном аккаунте в июле в случае положительного решения приемной комиссии.

Обучение на платформе zftsh.online

Ученик в течение учебного года в соответствии с программой получает в личном кабинете на сайте <https://zftsh.online> доступ к заданиям по изучаемым предметам. Ученик выполняет на сайте задания с помощью встроенного редактора или путем прикрепления скан-копий или фотографий работ, выполненных в тетради.

Работы по истечении срока выполнения проверяют на сайте закрепленные за учеником преподаватели ЗФТШ. Как только ра-

бота проверена, ученик видит свою работу с рецензией и авторскими решениями контрольной части задания.

ОЧНО-ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ (*обучение в факультативных группах*)

Телефон: (498) 744-63-51,

e-mail: fakultativ@mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя, тремя или четырьмя преподавателями* – физики, математики, информатики и химии, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ (работы проверяются руководителями групп и в ЗФТШ не высылаются).

Вступительное задание для очно-заочного отделения будет размещено на сайте school.mipt.ru 29 марта и будет доступно до 30 мая.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть на сайте ЗФТШ в разделе «отделения» → «очно-заочное» → «поступление»). В заявлении должны быть указаны Ф.И.О. руководителей факультативной группы по предметам и поименный алфавитный список обучающихся (Ф. И. О. в алфавитном порядке полностью с указанием класса, в который поступают учащиеся, и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным предметам, адрес, телефон и e-mail школы).

Заявление можно выслать обычной почтой, вложив конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»), или выслать в отсканированном виде (с подписями и печатью) на e-mail: fakultativ@mipt.ru *до 1 июня 2021 года.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года: получать учебно-методические материалы (програм-

мы по физике, математике, химии и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики (kpk.mipt.ru), проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп (в ЗФТШ не высылаются), а в ЗФТШ высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость (11 класс) за год, образец – на сайте ЗФТШ. (Подробнее – в разделе «Рекомендации».)

ОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ (*заочное обучение с посещением очных консультаций*)

Телефон: (925) 755-55-80,

Группа ВК: <https://vk.com/vftsh>

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится в сентябре в два этапа:

- заочный этап – тестирование на сайте <http://zftsh.online>,
- очный этап – устные экзамены.

Более подробная информация о наборе на очное отделение будет размещена на сайтах ЗФТШ в августе 2021 года.

Занятия с учащимися очного отделения проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский.

КОНТАКТЫ ЗФТШ

Почтовый адрес: Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141700, ЗФТШ.

Телефоны: (495) 408-51-45 – заочное отделение,

(498) 744-63-51 – очно-заочное отделение, (498) 744-65-83 и (925) 755-55-80 – очное отделение.

Web: www.school.mipt.ru

E-mail: zftsh@mail.mipt.ru – заочное отделение,

fakultativ@mipt.ru – очно-заочное отделение.

Web: www.school.mipt.ru

<https://zftsh.online>

ВК: <https://vk.com/club1032617>

Очное отделение при ФАЛТ МФТИ в Жуковском

E-mail: vftsh@mail.ru

ВК: <https://vk.com/vftshfalt>

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №10)

1. Нужно стереть одну черту у цифры четыре, чтобы остался знак «+».

2. Нет.

Пусть последовательные числа – это n и $n+1$, а соседние четные числа – это m и $m+2$ ($m > 0$). Если $m \geq n$, то $m(m+2) > n(n+1)$. Если же $m < n$, то $m+2 \leq n+1$ и $m(m+2) < n(n+1)$.

3. 8.

Каждый из 24 квадратов примыкает ровно к одной вершине кубика. К каждой вершине кубика примыкают три квадрата, и они должны быть трех разных цветов. Значит, синих квадратов столько же, сколько вершин, т.е. 8.

4. Воспользуемся следующим очевидным утверждением. Имеется K карточек. Известно, что какие бы M из них ни взяли, среди них окажется не менее N особых. В этом случае среди K карточек имеется не менее $K - M + N$ особых.

Считая, что особые карточки – красные, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K - M + N$
100	50	30	80
80	20	10	70
70	5	3	68

Считая, что особые карточки – синие, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K - M + N$
100	80	20	40
40	10	2	32

Итак, в колоде находятся 68 красных и 32 синие карточки.

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №11-12)

1. Как видно из рисунка 1, длина кошки примерно равна 0,5 м.

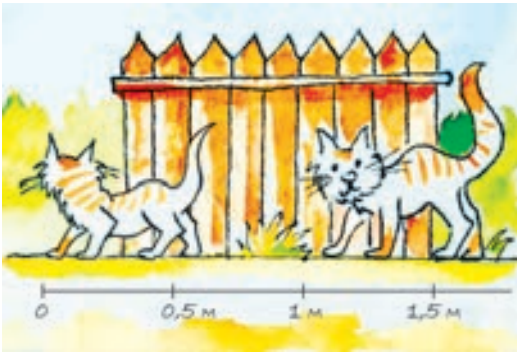


Рис. 1

2. На одной стороне листа семь кружочков, на другой – пять. Всего двенадцать кружочков.
3. Остриё.
4. «Тридцать первое», – ответил мальчик, имея в виду число месяца.

Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №9)

1. $1/10$.

Обозначим центр нашего 10-угольника через O (рис.2). Отрезки CD и AO параллельны. Значит, треугольники ACD и OCD имеют одинаковую площадь: у них равны высоты, опущенные на общее основание CD . Весь 10-угольник состоит из равнобедренных треугольников с вершиной в O и основаниями на сторонах 10-угольника. Таких треугольников 10, и площадь каждого равна площади OCD .

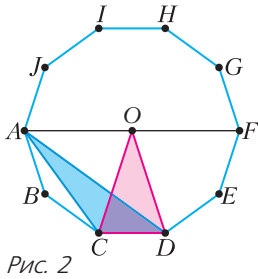


Рис. 2

2. Пусть горизонтальные разрезы делят вертикальную сторону на a частей, длины которых x_1, x_2, \dots, x_a соответственно. По принципу Дирихле, среди $a + 1$ чисел

$$0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_a$$

найдутся два, имеющих одинаковый остаток при делении на a . Тогда их разность делится на a и равна сумме длин $x_i + \dots + x_j$ каких-то последовательных частей вертикальной стороны. Они заключены между двумя горизонтальными прямыми (разрезами или сторонами). Теперь обратимся к вертикальным разрезам. Пусть они делят горизонтальную сторону на b частей. Аналогично, найдутся две вертикальные прямые (разрезы или стороны), расстояние между которыми делится на b . Тогда площадь прямоугольника, ограниченного четырьмя найденными прямыми (парой горизонтальных и парой вертикальных), будет делиться на ab . Но $N = ab$.

3. 1.

Сам квадрат 10×10 точно был подсчитан Васей, так что ответ не менее 1. При этом возможна ситуация, когда никакие другие квадраты не подсчитаны – например, как на рисунке 3.

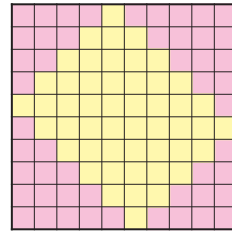


Рис. 3

4. Продлим AB и AD до пересечения с l в точках P и Q соответственно. Проведем отрезки PD и QB . Прямая, проходящая через точку их пересечения и точку A , будет перпендикулярна l . Докажем это. (Тогда пересечение этой прямой с l будет искомой точкой T .) Для этого покажем, что отрезки AT , PD и QB пересекаются в одной точке.

Первое решение. Пусть $AB = BC = CD = DA = 1$, $PB = x$ (рис.4). Чтобы воспользоваться теоремой

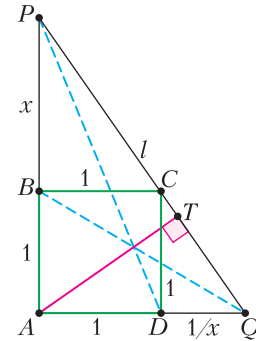


Рис. 4

Чевы, выразим отношения $PB : BA$, $AD : DQ$, $QT : TP$ через x и докажем, что их произведение равно 1.

- 1) Во-первых, $PB : BA = x$.
- 2) Из подобия PBC и CDQ получаем $AD : DQ = CD : DQ = PB : BC = x$.
- 3) Такое же отношение катетов x и в подобных им треугольниках ATQ и PTA . Тогда $AT : TQ = x$, $PT : TA = x$. Перемножая эти равенства, получим $PT : TQ = x^2$. Итак, третье отношение равно $QT : TP = \frac{1}{x^2}$.

Три искомых отношения равны x , x и $\frac{1}{x^2}$ и дают в произведении 1. Значит, по теореме Чевы, отрезки AT , PD и QB пересекаются в одной точке.

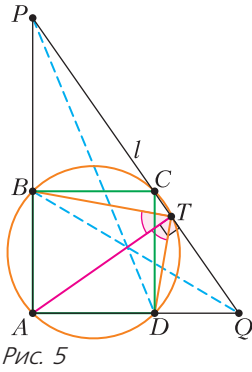


Рис. 5

Второе решение (прислала участница конкурса Мария Дренчева). Так как $\angle ATC = 90^\circ$, то точка T лежит на окружности с диаметром AC , т.е. на описанной окружности квадрата $ABCD$ (рис.5). На этой окружности хорды AB и AD стягивают концы дуг, равных четверти окружности. Значит, вписанные углы ATB и ATD равны (по 45°). И так, AT – высота треугольника APQ и от основания высоты под равными углами к ней проведены отрезки TB и TD . Тогда, по теореме Бланше (Blanchet), отрезки AT , PD и QB пересекаются в одной точке.

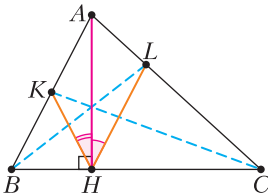


Рис. 6

Теорема Бланше. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки K и L соответственно (рис.6). Отрезки BL и CK пересекаются на высоте AH тогда и только тогда, когда $\angle ANK = \angle AHL$.

Доказательство. Проведем через точку A прямую, параллельную BC (рис.7). Пусть прямые NK и NL пересекают ее в точках X и Y соответственно.

Отрезки AH , BL , CK пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда для них в треугольнике ABC выполняется условие теоремы Чевы, т.е.

произведение отношений $\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CH}{HB}$ равно 1.

Преобразуем это произведение, используя подобие зеленых треугольников между собой и розо-

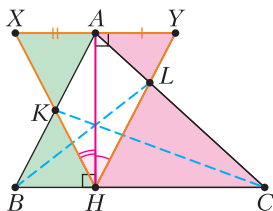


Рис. 7

вых – между собой:

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CH}{HB} = \frac{BH}{XA} \cdot \frac{AY}{HC} \cdot \frac{CH}{HB} = \frac{AY}{XA}$$

Несложно понять, что $\frac{AY}{XA} = 1$ тогда и только тогда, когда $\angle ANX = \angle ANY$.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Мяч будет двигаться с прежней скоростью к передней стенке вагона. На шарик же будет действовать сила, обусловленная разностью давлений уплотняющегося при торможении воздуха. Эта сила сообщит шарик с более легким, чем воздух, водородом направленное к задней стенке ускорение, большее ускорения вагона, и шарик отклонится назад.
2. Накопленная при подготовке удара энергия топора расходуется за очень малое время, значит, мощность и сила, развиваемые при ударе, будут велики. Также действие топора усиливается малой площадью, по которой распределяется при ударе сила, – создается большое давление.
3. Обруч закручен так, что движется с проскальзыванием. Сила трения скольжения сначала тормозит обруч, затем ускоряет его в обратном направлении, пока проскальзывание не прекратится, и последний участок пути назад обруч проходит почти равномерно.
4. В движущейся системе отсчета сила натяжения нити совершает работу, приводящую к изменению кинетической энергии шарика. Так что с законом сохранения энергии все в порядке.

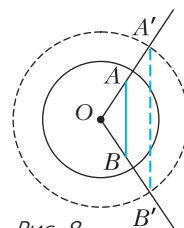


Рис. 8

5. При нагревании монеты угол, под которым видна прямая AB , не изменяется (рис.8). Все линейные размеры монеты пропорционально вырастут, треугольник $A'OB'$ будет подобен треугольнику AOB , значит, прямая сдвинется параллельно самой себе.

6. На сильно раскаленной плите капля отделена от нее слоем плохо проводящего тепло водяного пара. При слабом накале капля воды прилегает к плите вплотную.
7. Держа дверцу открытой, мы вынуждаем двигатель холодильника понижать температуру воздуха не только в его камере, но и во всей комнате. Но при этом отобранное тепло в нее же и будет возвращаться. В итоге холодильник превратится в нагревательный прибор.
8. Добавление теплоизоляции удвоило площадь поверхности, с которой происходит тепловое излучение. И если материал изолирующего слоя обладает не очень малой теплопроводностью, то потери действительно могут возрасти.

9. Увы, при больших зазорах между обкладками конденсатора электрическое поле перестает быть однородным и разность потенциалов уже не зависит линейно от расстояния между ними.

10. Если заряд шара B равен нулю, то он будет притягиваться к шару A , т.е. на него будет действовать направленная влево равнодействующая сила (рис.9). Сообщение шару B очень небольшо-

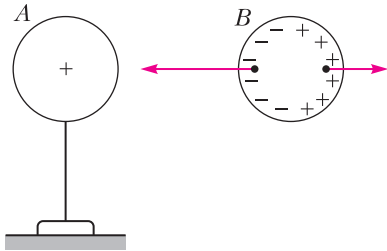


Рис. 9

го положительного заряда мало изменит величину этой силы, и она по-прежнему будет направлена влево.

11. В случае малых размеров осколков на стене образуется круглое изображение Солнца. Когда же их размеры превзойдут размеры изображения, оно приобретет форму самих осколков.

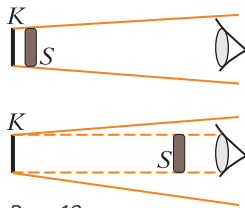


Рис. 10

12. Если спичка S находится вблизи строки K , то ни один выходящий из строки луч не попадает в глаз человека (рис.10). Во втором случае некоторые лучи могут пройти внутрь глаза.

Микроопыт

Нажимая ладонью на бумагу, вы прогибаете ее, и часть воздуха из стакана вытесняется. В перевернутом положении вода опускается, и бумага под действием силы тяжести воды становится плоской. Объем воздуха в стакане увеличивается, и давление в нем становится меньше атмосферного. Поэтому внешнее давление и не дает воде выливаться из стакана.

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1. 1680.

Ввиду того, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) три тройки, три пятерки и две единицы или (б) тройка, девятка, три пятерки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем три места из восьми для расположения троек ($C_8^3 = \frac{8!}{3!5!}$ способов), затем – три места из пяти оставшихся для размещения пятерок ($C_5^3 = \frac{5!}{3!2!}$ способов). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{3!13!} = 1120$. Окончательно получаем $560 + 1120 = 1680$ способов.

2. $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{aligned} -2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x &= \\ = \sqrt{2} \cos 14x &\Leftrightarrow -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \\ = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0, \\ \cos 7x - \sin 7x = -\sqrt{2} \sin 4x \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1, \\ \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4x \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi k, \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ.

3. $(2; 2), (9; 3), \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right).$

Логарифмируем первое уравнение системы по основанию 10:

$$\lg \left(\frac{y^5}{x} \right) \cdot \lg x = \lg y^2 \cdot \lg (xy).$$

Это уравнение на области допустимых значений равносильно следующему:

$$\begin{aligned} (5 \lg y - \lg x) \lg x &= 2 \lg y (\lg x + \lg y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg^2 x - 3 \lg y \lg x + 2 \lg^2 y &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lg x - \lg y) (\lg x - 2 \lg y) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Записываем второе уравнение в виде $x^2 - 2x(y + 2) + 12y - 3y^2 = 0$ и решаем его как квадратное относительно переменной x :

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (y + 2)^2 - (12y - 3y^2) = 4y^2 - 8y + 4 = \\ &= (2y - 2)^2 \Rightarrow x = y + 2 \pm (2y - 2). \end{aligned}$$

Значит, $x = 3y$ или $x = 4 - y$. Далее возможны четыре случая:

а) $\begin{cases} x = y, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\begin{cases} x = y, \\ x = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = y^2, \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x = 9, \\ y = 3. \end{cases}$

Точка $(0;0)$ не удовлетворяет ОДЗ.

г) $\begin{cases} x = y^2, \\ x = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y, \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y, \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Точка $\left(\frac{9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)$ не удовлетворяет ОДЗ.

Объединяя результаты, получаем ответ.

4. $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}, \Sigma = \frac{16}{9}$.

Обозначим точки пересечения прямой SO со сферой через P и Q , чтобы точка P лежала на отрезке SO , а Q - вне него. Рассмотрим сечение трехгранного угла и сферы плоскостью SKO (рис.1). Пусть радиус сферы равен r . Треугольник OKS и аналогичные треугольники OLS и OMS прямоугольные (углы при вершинах K, L, M прямые, так как касательные перпендикулярны радиусам, проведенным в точку касания). Эти треугольники равны по катету и гипотенузе ($OK = OL = OM = r, SO$ - общая), следовательно, $\angle KSO =$

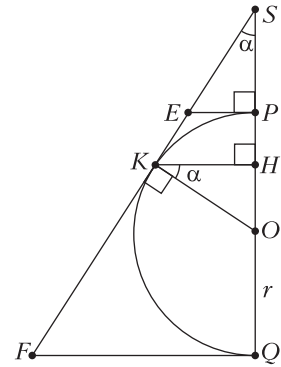


Рис. 11

$= \angle LSO = \angle MSO$; пусть $\angle KSO = \alpha, SO = x$. Высоты, опущенные из точек K, L, M на гипотенузу SO , равны, а их основания - одна и та же точка H , лежащая в плоскости KLM ; назовем эту плоскость τ . Пусть β и γ - касательные плоскости к сфере, проходящие через точки P и Q , а E и F - точки пересечения этих плоскостей с прямой SK . По условию площади сечений трехгранного угла этими плоскостями равны соответственно $S_1 = 1$ и $S_2 = 4$. Так как $SH \perp HK$ и $SH \perp HL$, то $\tau \perp SH$. Тогда сечения трехгранного угла плоскостями τ, β и γ - подобные треугольники, плоскости которых параллельны (все они перпендикулярны SO).

Если Σ - площадь треугольника, получающегося в сечении трехгранного угла плоскостью KLM , то из подобия имеем $\Sigma : S_1 : S_2 = KH^2 : EP^2 : FQ^2$.

Следовательно, $EP : FQ = \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} &= SP : SQ = (x - r) : (x + r), \quad \text{откуда} \\ r &= x \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}}, \text{ а } \sin \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$.

Так как $\angle OKH = \angle KSO = \alpha$, то $OH = r \sin \alpha, SH = SO - OH = \frac{r}{\sin \alpha} - r \sin \alpha, SP = SO - r =$

$$\begin{aligned} &= \frac{r}{\sin \alpha} - r. \text{ Значит, } \Sigma : S_1 = KH^2 : EP^2 = SH^2 : SP^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right)^2 : \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1\right)^2 = (1 + \sin \alpha)^2 = \frac{16}{9}, \end{aligned}$$

откуда $\Sigma = \frac{16}{9}$.

5. $a \in \{1; 25\}$.

Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости (рис.12). Для раскрытия модулей найдем множество точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y - 3 - x = 0$ и $y - 3 + x = 0$. Они делят плоскость

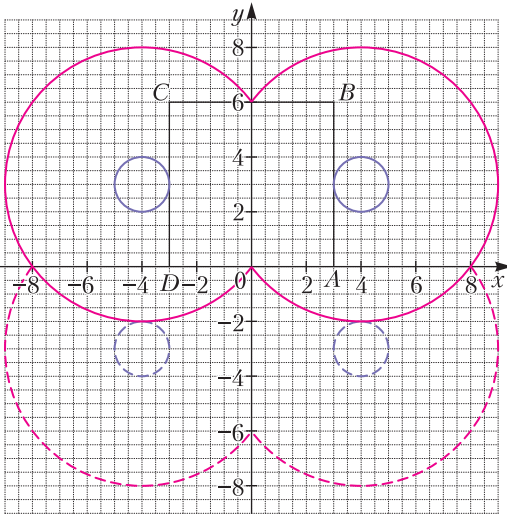


Рис. 12

на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырех частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмем область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y - 3 - x$ и $y - 3 + x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6$, откуда $y = 0$. С учетом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(3;0)$ и $D(-3;0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(3;0)$, $B(3;6)$, $C(-3;6)$ и $D(-3;0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y < 0$, поэтому можно считать, что $y \geq 0$. С учетом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a < 0$, у уравнения нет решений. При $a = 0$ оно задает две точки $(4;3)$ и $(-4;3)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K , система не имеет решений, и значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдем к случаю $a > 0$. При $x \geq 0$ уравнение принимает вид $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, и мы получаем окружность радиуса \sqrt{a} с центром в точке $(4;3)$ (или ее часть, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy . Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или

ее части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy . Если $0 < a < 1$, график $(|x| - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$ не пересекает квадрат K , и система уравнений не имеет решений. Если $a = 1$, система уравнений имеет два решения – точки $X(3; 3)$ и $Y(-3; 3)$. Если $a \in (1; 10]$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (10; 25)$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a = 25$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; 6)$. Наконец, если $a > 25$, дуга окружности $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a$, $x \geq 0$ не пересекает стороны квадрата K , и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 1$ и $a = 25$.

6. а) $CF = 10$; б) $S_{ACF} = 49$.

а) Пусть $R = 5$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 13). Тогда $\angle BAC =$

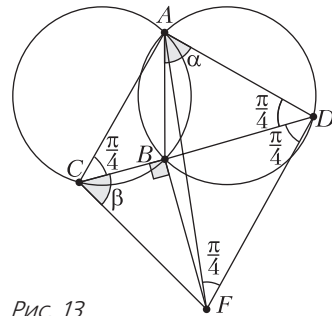


Рис. 13

$= \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 10$.

б) Углы ADC и ACD вписаны в равные окружности, опираются на одну и ту же хорду AB и оба являются острыми ($\triangle ACD$ – прямоугольный), поэтому они равны. Значит, $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Но, по условию, треугольник DBF – также прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $\angle BDF = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ADF = \frac{\pi}{2}$. Значит, $DF \parallel AC$, и потому высота треугольника ACF , проведенная из вершины F , равна перпендикуляру DA к

прямой AC . Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot AC^2$. По теореме синусов $AC = 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, $BC = 2R \cos \alpha$, откуда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Тогда $AC = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = 7\sqrt{2}$. Значит, $S_{ACF} = 49$.

7. $61 \cdot 2^{69} + 2144$.

Пусть $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$, $g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$. В силу того что $f(x)$ выпукла вниз, а $g(x)$ – линейная, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ могут иметь не более двух общих точек. Координаты обеих точек легко подобрать. Действительно, $f(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 6 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 6 = g(6)$ и $f(70) = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 \cdot 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 70 = g(70)$.

На промежутке $6 < x < 70$ график $f(x)$ лежит ниже графика $g(x)$. Поэтому система имеет целочисленные решения только при целых $x \in [7; 69]$ (так как первое неравенство системы строгое, точки пересечения графиков не являются решениями системы).

Заметим, что на отрезке $[7; 69]$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ лежат выше оси Ox . Поэтому искомое количество целочисленных точек мы получим, если из количества S_1 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $g(x)$ на отрезке $[7; 69]$, вычтем количество S_2 целочисленных точек с неотрицательными ординатами, лежащих под графиком $f(x)$ на отрезке. При этом мы учтем, что первое неравенство системы строгое, а второе – нет.

Найдем S_1 . Так как на отрезке лежат $69 - 7 + 1 = 63$ целочисленные точки, то

$$\begin{aligned} S_1 &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1)(7 + 8 + \dots + 69) = \\ &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 63 = 32 \cdot 63 + 2^{64} \cdot 38 \cdot 63 = \\ &= 2016 + 2^{65} \cdot 1197. \end{aligned}$$

Найдем S_2 . Имеем:

$$\begin{aligned} S_2 &= (2^7 + 3 \cdot 2^{65}) + (2^8 + 3 \cdot 2^{65}) + \dots + (2^{69} + 3 \cdot 2^{65}) = \\ &= 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69} + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 = 2^{70} - 2^7 + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 = \\ &= 2^5 \cdot 2^{65} - 128 + 189 \cdot 2^{65} = 221 \cdot 2^{65} - 128. \end{aligned}$$

Искомое количество равно

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= 2016 + 2^{65} \cdot 1197 - (221 \cdot 2^{65} - 128) = \\ &= 2144 + 61 \cdot 2^{69}. \end{aligned}$$

Вариант 2

1. $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$.

В силу того что выпадения орла и решки равновероятны, вероятность получить 90 орлов равна

вероятности получить 90 решек (т.е. 0 орлов); вероятность получить 89 орлов равна вероятности получить 89 решек (т.е. одного орла) и т.д. Обозначим вероятность того, что выпало ровно k орлов, через p_k . Тогда $p = p_{55} + p_{56} + \dots + p_{90}$, $q = p_0 + p_1 + \dots + p_{34}$, а в силу сказанного выше, $q = p_{90} + p_{89} + \dots + p_{56}$. Значит, $p - q = p_{55}$.

Посчитаем вероятность того, что орел выпадает ровно 55 раз при 90 бросках. Если обозначить выпадение орла нулем, а выпадение решки единицей, то каждую последовательность из 90 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна $\frac{1}{2^{90}}$.

Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 35 единиц. Их количество равно C_{90}^{35} (выбираем из имеющихся 90 позиций 35 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$. Это и есть p_{55} .

2. $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \neq 11p + 4$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. $x \in (1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$.

Заметим, что

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} = (3^{\log_3 x})^{\sqrt{\log_3 x}} = 3^{\sqrt{\log_3 x} \cdot \log_3 x} = 3^{\sqrt{\log_3 x}}.$$

Значит, неравенство можно переписать в виде $3^{\sqrt{\log_3 x}} - 11 \cdot 3^{2\sqrt{\log_3 x}} + 40 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 48$. (Отметим, что при этом изменилась область допустимых значений: исчезло ограничение $x \neq 1$, которое необходимо будет учесть в дальнейшем.) Обозначим $t = 3^{\sqrt{\log_3 x}}$. Тогда получаем $t^3 - 11t^2 + 40t - 48 \leq 0$, или, раскладывая левую часть на множители, $(t - 3)(t - 4)^2 \leq 0$, откуда следует, что $t \in (-\infty; 3] \cup \{4\}$.

Возвращаясь к переменной x , находим, что

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3, \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_3 x} \leq 1, \\ \sqrt{\log_3 x} = \log_3 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \log_3 x \leq 1, \\ \log_3 x = \log_3^2 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ x = 4^{\log_3 4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Выше было получено, что $x \neq 1$, поэтому окончательный результат таков: $x \in (1; 3] \cup \{4^{\log_3 4}\}$.

4. а) $S_{KLM} = 9,8$; б) $V_{SABC} = \frac{1372}{3}$.

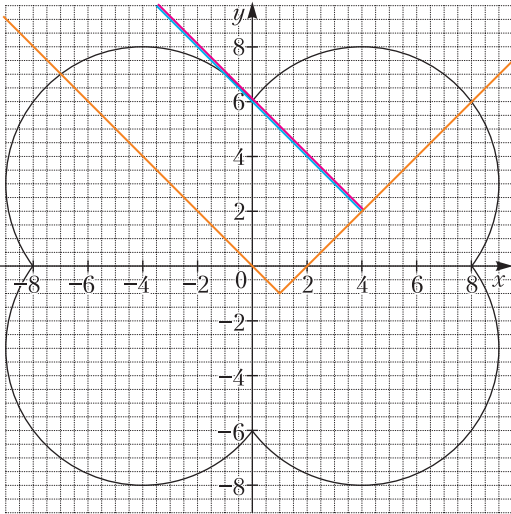


Рис. 14

5. $a \in \left\{ 1; 16; \left(\frac{5\sqrt{2} + 1}{2} \right)^2 \right\}$.

См. рисунок 14. Решение аналогично решению задачи 5 варианта 1.

6. а) $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$; б) $R_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

а) Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей ω_1, ω_2 соответственно, $\angle O_1BO_2 = \alpha$, а прямые DO_2 и l_2 пересекаются в точке P (рис.15). Тогда из условия касания $\angle O_2BE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle BO_2P = \frac{\pi}{2} - \angle O_2BE = \alpha$. Треугольники BO_1O_2 и CO_1O_2 равны по трем сторонам, поэтому $S_{BO_1CO_2} = 2S_{CO_1O_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot BO_2 \cdot \sin \alpha = R_1R_2 \sin \alpha$. Площадь треугольника BO_2E равна $\frac{1}{2} O_2P \cdot BE = \frac{1}{2} R_2 \cos \alpha \cdot 2R_2 \sin \alpha = R_2^2 \sin \alpha \cos \alpha$. Значит,

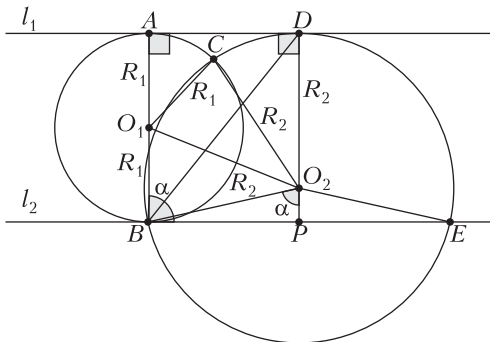


Рис. 15

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1}{R_2 \cos \alpha} = 2, \text{ т.е. } \frac{1}{2} R_1 = R_2 \cos \alpha. \text{ Далее,}$$

$AB = DP$, откуда $2R_1 = R_2 + R_2 \cos \alpha$, следовательно

$$\text{но, } 2R_1 = R_2 + \frac{1}{2} R_1, \text{ и } \frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}.$$

б) Из прямоугольного треугольника ABD получаем

$$BD^2 = AB^2 + AD^2, \text{ т.е. } BD^2 = 4R_1^2 + BP^2 =$$

$$= 4R_1^2 + (R_2 \sin \alpha)^2 = 4R_1^2 + R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2.$$

Итак, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$ и $4R_1R_2 = 2^2 = 4$. Отсюда $R_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

7. $\frac{1}{2} \cdot 6^{180} - \frac{7}{10} \cdot 6^{90} + \frac{456}{5}$.

Избранные задачи для 10 класса

1. Увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q . Так как все ее члены положительны, $q > 0$. Если $q = 1$, то $S = 3000b_1$, а при увеличении членов с номерами, кратными 3, в 50 раз получим сумму

$$S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49 \cdot \frac{S}{3} = \frac{52S}{3}.$$

Это противоречит условию, следовательно, $q \neq 1$, значит, сумма первых n членов прогрессии может

быть посчитана по формуле $S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$. В

частности, $S = b_1 \frac{1 - q^{3000}}{1 - q}$.

При увеличении членов $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ в 50 раз

получаем сумму $S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$

$$= S + 49b_3 \frac{1 - (q^3)^{1000}}{1 - q^3} = S + 49b_1 q^2 \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q + q^2)} =$$

$$= S + \frac{49q^2 S}{1 + q + q^2}, \text{ которая равна } 10S. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{49q^2}{1 + q + q^2} = 9, \quad 40q^2 - 9q = 0, \quad q = \frac{3}{5} \text{ или } q = -\frac{3}{8}.$$

Нам подходит положительное значение q , т.е.

$$q = \frac{3}{5}.$$

Если увеличить все члены прогрессии с четными номерами вдвое, получаем

$$S + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S + b_2 \frac{1 - (q^2)^{1500}}{1 - q^2} =$$

$$= S + b_1 q \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q)} = S + \frac{q}{1 + q} S = \frac{11}{8} S. \text{ Значит,}$$

сумма S возрастет в $\frac{11}{8}$ раз.

$$\begin{aligned}
 & 2. \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{7}) \right), \\
 & \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{7}) \right), \\
 & \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7}-1); -\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{7}) \right), \\
 & \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7}-1) \right).
 \end{aligned}$$

Обозначим точки, в которых находятся водомерка и жук, $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиусы-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между \overline{AM}_0 и \overline{AN}_0 равен π , и при этом $-\pi < \alpha_0 < -\frac{\pi}{2}$, $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, где α_0, β_0 – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между водомеркой и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами \overline{AM} и \overline{AN} равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 4\sqrt{2}$ и $|AN_0| = 10\sqrt{2}$ – это радиусы окружностей и $|AN_0| = \frac{5}{2}|AM_0|$, то угловая скорость водомерки в 5 раз больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту совпадения направлений векторов \overline{AM} и \overline{AN} жук продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha + 5\omega = \beta + \omega + 2\pi n$, где $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\omega = \frac{\beta - \alpha}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, 1, \dots$

Различных точек будет четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$).

Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{4}$. Координаты положения жука найдем по формулам $x_N = 10\sqrt{2} \cos \beta_1$, $y_N = 10\sqrt{2} \sin \beta_1$. Используя координаты точки N_0 , находим $\cos \beta_0 = \frac{x_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\sin \beta_0 = \frac{y_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\begin{aligned}
 \cos \beta_1 &= \cos \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \beta_1 &= \sin \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Отсюда} \quad x_{N_1} &= 10\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{7}), \\
 y_{N_1} &= 10\sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}).
 \end{aligned}$$

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$.

3. $CF = 26$, $S_{\Delta ACF} = 119$.

4. $2 + \sqrt{3}$.

Первый множитель в левой части положителен при любых допустимых значениях x . Так как второй множитель всегда неотрицателен, неравенство на ОДЗ (т.е. при условии $x^3 + 2x - 58 \geq 0$) равносильно уравнению $x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$. Одним из целых корней уравнения является $x = 3$ (несложно найти подбором среди делителей свободного члена уравнения). Выполнив деление левой части на многочлен $x - 3$, раскладываем ее на множители: $(x - 3)(x^2 - 4x + 1) = 0$. Отсюда $x = 3$ или $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Подставляем полученные значения x в неравенство $x^3 + 2x - 58 \geq 0$ для проверки:

$$x = 3 \Rightarrow 27 + 6 - 58 \geq 0 - \text{неверно};$$

$$\begin{aligned}
 x = 2 + \sqrt{3} &\Rightarrow (2 + \sqrt{3})^3 + 2(2 + \sqrt{3}) - 58 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 17\sqrt{3} - 28 \geq 0 - \text{верно};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = 2 - \sqrt{3} &\Rightarrow (2 - \sqrt{3})^3 + 2(2 - \sqrt{3}) - 58 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -17\sqrt{3} - 28 \geq 0 - \text{неверно}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, подходит только $x = 2 + \sqrt{3}$.

$$5. -\frac{4}{5}; 1; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Уравнение можно переписать в виде $5x^4 + (x + 4)^2 - 6x^2|x + 4| = 0$, или $|x + 4|^2 - 6x^2|x + 4| + 5x^4 = 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трехчлен относительно $y = |x + 4|$ с дискриминантом, равным $(6x^2)^2 - 4 \cdot 5x^4 = 16x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{6x^2 \pm 4x^2}{2}$, т.е. $y_1 = 5x^2$ и $y_2 = x^2$, а уравнение принимает вид $(|x + 4| - 5x^2)(|x + 4| - x^2) = 0$.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x^2 = x + 4, \\ x^2 = -x - 4, \\ 5x^2 + x + 4 = 0, \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0, \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ x = -\frac{4}{5}, \\ x = 1. \end{cases}$$

ФИЗИКА

9 класс

Вариант 1

1. 1) Условие встречи: $v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$, откуда

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43, \quad \cos \beta \approx 0,9.$$

$$2) T = \frac{l - s}{v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta} = 10 \text{ с.}$$

$$2. 1) T = 2 \frac{v_0 \sin \phi}{g \cos \alpha}, \quad T_{\max} = 2 \frac{v_0}{g \cos \alpha} \text{ при } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) s = 0,5g \sin \alpha \cdot T_{\max}^2,$$

$$v_0 = \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot T_{\max} = \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{gs}{2 \sin \alpha}} \approx 77 \text{ м/с.}$$

$$3. 1) v_2 = \sqrt{2gh} = 4 \text{ м/с.}$$

2) По теореме об изменении импульса системы, $m(v_1 + v_2 \sin \alpha) = \mu m v_2 \cos \alpha$. Ускорение бруска перед соударением равно $a = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = g \frac{v_1}{v_2} = 2,5 \text{ м/с}^2$.

4. 1) В процессе слипания импульс системы сохраняется:

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}, \quad \vec{v} = 0,5(\vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$

$$v = 0,5\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 50 \text{ м/с.}$$

2) Закон сохранения энергии при слипании:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + Q, \quad \text{или } Q = \frac{m}{4}(v_1^2 + v_2^2).$$

В тепловом процессе $Q = \frac{m}{4}(v_1^2 + v_2^2) = 2mc\Delta t$, откуда

$$\Delta t = \frac{1}{8c}(v_1^2 + v_2^2) \approx 9,6 \text{ }^\circ\text{C.}$$

$$5. 1) \text{ Согласно схеме, } R_{AB} = \frac{4}{5}r + 3r = \frac{19}{5}r = 38 \text{ Ом.}$$

$$2) \text{ В цепь втекает ток } I_0 = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{5}{19} \frac{U}{r}. \text{ Искомый ток равен } I = \frac{1}{5}I_0 = \frac{1}{19} \frac{U}{r} = 0,2 \text{ А.}$$

Вариант 2

$$1. 1) v_0 = \frac{2\pi R}{T} = 2 \text{ м/с.}$$

2) При качении без проскальзывания относительная скорость любой точки обода равна по величине скорости оси колеса в лабораторной системе отсчета. Из закона сложения скоростей следует $\vec{v}_0 = 0,5(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$, в рассматриваемой задаче $\vec{v}_A \perp \vec{v}_B$, тогда $4v_0^2 = v_A^2 + v_B^2$, $v_A = \sqrt{4v_0^2 - v_B^2} \approx 3,46 \text{ м/с.}$

$$2. 1) T = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \approx 0,7 \text{ с,}$$

$$2) v_{0x} = \frac{s}{\tau}, \tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}, v_{0y} = \sqrt{2g(H-h)}, v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} =$$

$$= \sqrt{2g\left(H-h + \frac{s^2}{2H}\right)} \approx 17 \text{ м/с.}$$

3. 1) При движении бруска вниз $mg \sin \alpha = F_1 + \mu mg \cos \alpha$, при движении бруска вверх $F_2 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha$. Отсюда $\mu = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0,19$.

2) Ускорение бруска при скольжении вверх по наклонной плоскости равно $a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{2}{3}g$. Начальная скорость равна $v_0 = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3}gs} \approx 4,2 \text{ м/с.}$

4. 1) Перед соударением импульс системы нулевой, следовательно, в момент, когда деформация максимальная, шайбы покоятся. Тогда $E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 1,5 \text{ Дж.}$

2) Относительная скорость до и после абсолютно упругого столкновения одинакова по величине, следовательно, $T = \frac{L}{v_1 + v_2} = 0,4 \text{ с.}$

$$5. 1) U_0 = 3U = 12 \text{ В.}$$

2) При включенном амперметре сопротивление цепи $\frac{4}{3}R$, ток через источник $\frac{3}{4} \frac{U_0}{R}$, ток через амперметр $I = \frac{U_0}{4R}$. При включенном вольтметре сопротивление цепи $\frac{3}{2}R$, во всей цепи рассеивается мощность $P = \frac{U_0^2}{1,5R} = 8UI = 0,96 \text{ Вт.}$

10 класс

Вариант 1

$$1. 1) (2,5v_0)^2 = v_b^2 + (v_0 \cos \alpha)^2, \quad v_b = \sqrt{(2,5v_0)^2 - (v_0 \cos \alpha)^2} = v_0 \sqrt{6} = 8\sqrt{6} \text{ м/с} \approx 19,6 \text{ м/с.}$$

$$2) v_b = v_0 \sin \alpha + gt, \quad t = \frac{v_b - v_0 \sin \alpha}{g} =$$

$$= \frac{v_0}{g} \left(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 1,3 \text{ с.}$$

$$3) L = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{v_0^2}{2g} \left(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 5,1 \text{ м.}$$

$$2. 1) N = (M + m)g = 6mg.$$

$$2) 2F_0 = \mu N, \quad F_0 = 3\mu mg.$$

$$3) a = \frac{2F - \mu N}{M + m}, \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2s \left(\frac{F}{3m} - \mu g \right)}.$$

3. 1) $F_1 = mg \sin \alpha$.

2) Ускорение $a = \omega^2 (L + R) \cos \alpha$. Уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление нити $F_2 - mg \sin \alpha = ma \cos \alpha$. Отсюда $F_2 = m(g \sin \alpha + \omega^2 (L + R) \cos^2 \alpha)$.

4. 1) Расстояние по горизонтали между верхними уровнями $L = h_1 + h_2$. По второму закону Ньютона $\rho a L = \rho g (h_2 - h_1)$. Отсюда $a = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} g = \frac{g}{5} = 2 \text{ м/с}^2$.

2) После «исчезновения» ускорения будут происходить колебания масла около равновесного положения. Пусть σ – масса единицы длины масла в трубке. Масса всего масла $m = \sqrt{2} (h_1 + h_2) \sigma$. Максимальная кинетическая энергия при прохождении положения равновесия $E_k = \frac{1}{2} m v^2$.

Изменение потенциальной энергии масла $\Delta E_{\text{п}} = \sigma \frac{h_2 - h_1}{2} \sqrt{2} g x$, где $x = \frac{h_2 - h_1}{2}$ – расстояние (по высоте) начальных уровней масла от равновесного положения уровней. По закону сохранения энергии $E_k = \Delta E_{\text{п}}$. Из записанных уравнений

$$\text{находим } v = \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2 + h_1}} \approx 0,2 \text{ м/с}.$$

$$5. 1) p = \frac{\rho_{\text{п}} RT}{M}, \quad \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho} = \frac{M p}{\rho RT} \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

2) Пусть V – начальный объем пара. Сконденсируется объем $V_k = V - \frac{V}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} V$. Масса воды $m_{\text{в}} = V_k \rho_{\text{п}}$. Объем воды $V_{\text{в}} = \frac{m_{\text{в}}}{\rho}$. Окончательно получаем $\frac{V/\gamma}{V_{\text{в}}} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho RT}{M p} \approx 540$.

Вариант 2

$$1. 1) v_{\text{в}} = \sqrt{(2v_0)^2 - (v_0 \cos \alpha)^2} = 5\sqrt{13} \text{ м/с} \approx 18 \text{ м/с}.$$

$$2) t = \frac{v_{\text{в}} - v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0}{2g} (\sqrt{13} - 1) \approx 1,3 \text{ с}.$$

$$3) H = \frac{3v_0^2}{2g} \approx 15 \text{ м}.$$

$$2. 1) m_1 v_0 = (M + 2m) v_1, \quad v_1 = \frac{m_1 v_0}{M + 2m}.$$

$$2) T = \frac{L}{v_0 + v_1} = \frac{L(M + 2m)}{v_0(M + 2m + m_1)}.$$

$$3) v_2 = 0.$$

3. 1) $F_1 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$, $F_1 = mg \operatorname{tg} \alpha$.

2) $F_2 \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma \cos \alpha$, $a = \omega^2 (L + R)$,

$$\frac{R}{L + R} = \sin \alpha, \quad F_2 = m \left(g \operatorname{tg} \alpha + \frac{\omega^2 L}{1 - \sin \alpha} \right).$$

4. Атмосферное давление $p_0 = \rho g H_0$, $H_0 = 740$ мм. Пусть L – длина горизонтального колена. По второму закону Ньютона для жидкости в горизонтальном колене $(p_0 + \rho g H) S = \rho L S a_0$. Тогда

$$a_0 = \frac{H_0 + H}{L} g.$$

$$1) p_1 = \rho g H_1, \quad p_1 S = \frac{2}{3} \rho L S a_0, \quad H_1 = \frac{2}{3} (H_0 + H), \quad p_1 = \rho g H_1 = 520 \text{ мм рт. ст.}$$

$$2) (p_0 + \rho g H) S - p_2 S = \frac{1}{3} \rho L S \cdot 0,6 a_0, \quad p_2 = \rho g H_2, \quad H_2 = 0,8 (H_0 + H), \quad p_2 = \rho g H_2 = 624 \text{ мм рт. ст.}$$

$$3) (p_0 + \rho g H) S - p_3 S = \rho L S \cdot 0,8 a_0, \quad p_3 = \rho g H_3, \quad H_3 = 0,2 (H_0 + H), \quad p_3 = \rho g H_3 = 156 \text{ мм рт. ст.}$$

$$5. 1) p_0 L S = \frac{5mRT}{M}, \quad m = \frac{M p_0 L S}{5RT} \approx 0,14 \text{ г}.$$

2) Пар внизу частично сконденсируется, а вверх вся вода испарится и пар станет ненасыщенным (это подтверждается расчетом). В состоянии равновесия $0,99 p_0 (L + h) S = \frac{6mRT}{M}$. Поршень сместится вниз на

$$h = \frac{6}{5 \cdot 0,99} L - L \approx \frac{1}{5} L = 0,12 \text{ м} = 12 \text{ см}.$$

11 класс

Вариант 1

$$1. 1) v_1 \cos \beta = v \cos \alpha, \quad v_1 = v \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{75}{68} v = 75 \text{ см/с}.$$

$$2) v_2 = v_1 \sin \beta + v \sin \alpha = v \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \sin \alpha \right) = \frac{77}{68} v = 77 \text{ см/с}.$$

3) Для кольца в лабораторной системе отсчета $F \cos(90^\circ - \beta) - N = \frac{m v_1^2}{R}$, относительно муфты

$$F - N \sin \beta = \frac{m v_1^2}{l}. \quad \text{Отсюда находим } F = \frac{15}{16} \frac{m}{R} (v_2^2 - v_1^2) = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

$$2. 1) \frac{C_{12}}{C_{23}} = \frac{C_V}{C_p} = \frac{3/2 R}{5/2 R} = \frac{3}{5}.$$

$$2) \frac{Q_{23}}{A_{23}} = \frac{v C_p (T_3 - T_2)}{p_2 (V_3 - V_2)} = \frac{v C_p (T_3 - T_2)}{v R (T_3 - T_2)} = \frac{C_p}{R} = \frac{5}{2}.$$

$$3) p = \alpha V, \quad V_3 = k V_1, \quad A = \frac{1}{2} (p_3 - p_1) (V_3 - V_1) = \frac{1}{2} \alpha V_1^2 (k - 1)^2; \quad Q_{123} = v \cdot \frac{3}{2} R (T_3 - T_1) + p_3 (V_3 - V_1) = \frac{1}{2} \alpha V_1^2 (k - 1) (5k + 3); \quad \eta = \frac{A}{Q_{123}} = \frac{k - 1}{5k + 3} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{8}{5k + 3} \right); \quad \text{при } k = \infty \quad \eta = \eta_{\text{max}} = 0,2.$$

3. 1) $\frac{3}{4}d = \frac{0 + v_1}{2}T, v_1 = \frac{3d}{2T}.$
 2) $\frac{3}{4}d = \frac{1}{2}aT^2, a = \frac{qE}{m} = \frac{q}{m} \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \gamma \frac{Q}{\epsilon_0 S}, Q = \frac{3 \epsilon_0 S d}{2 \gamma T^2}.$

3) Пусть скорости на бесконечности и в середине конденсатора равны v_1 и v_2 . Тогда $v_1^2 = 2a \cdot \frac{3}{4}d,$
 $v_2^2 = 2a \cdot \frac{1}{4}d, v_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{T}.$

4. Пока диод открыт, $\mathcal{E} + (-LI') - U = U_0, U$ – напряжение на конденсаторе.

1) Сразу после замыкания $\mathcal{E} + (-LI') - U_1 = U_0,$
 $I' = \frac{\mathcal{E} - U_1 - U_0}{L} = 30 \text{ А/с}.$

2) При $I = I_{\max} I' = 0 \cdot \mathcal{E} + 0 - U = U_0, U = \mathcal{E} - U_0,$
 $q = C(\mathcal{E} - U_0).$ Согласно закону сохранения энергии,
 $\mathcal{E}\Delta q = U_0\Delta q + \frac{1}{2}LI_{\max}^2 + \left(\frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}CU_1^2\right),$
 $\Delta q = C(\mathcal{E} - U_0) - CU_1, I_{\max} = (\mathcal{E} - U_0 - U_1)\sqrt{\frac{C}{L}} =$
 $= 0,06 \text{ А}.$

3) По закону сохранения энергии $\mathcal{E}(CU_2 - CU_1) =$
 $= U_0(CU_2 - CU_1) + 0 + \left(\frac{1}{2}CU_2^2 - \frac{1}{2}CU_1^2\right), U_2 =$
 $= 2(\mathcal{E} - U_0) - U_1 = 11 \text{ В}.$

5. 1) Изображение в зеркале получается на расстоянии $d = \frac{3}{2}F$ от линзы. Изображение в системе – на расстоянии $f = \frac{dF}{d - F} = 3F$ от линзы.

2) $\text{tg } \alpha = \frac{3F/4}{F} = \frac{3}{4}.$

3) Поперечное увеличение линзы $\Gamma = \frac{f}{d} = 2$. Пусть u – скорость изображения в системе. Скорость изображения в зеркале равна $2v$. Тогда $u \cos \alpha = 2v\Gamma^2, u = \frac{2v\Gamma^2}{\cos \alpha} = 10v.$

Вариант 2

1. 1) Имеем гармонические колебания с амплитудой A . Пусть x – отклонение от положения равновесия в искомые моменты, $\gamma = 2$. Тогда $\gamma k(A - x) = k(A + x), mg = kA, mg - k(A - x) = ma.$

Отсюда $a = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}g = \frac{1}{3}g.$

2) В искомые моменты скорости одинаковы. Поэтому $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = 1.$

3) $\alpha = \frac{E_{\text{п max}}}{E_{\text{к max}}} = \frac{0,5k(2A)^2}{0,5m v_{\text{max}}^2}, v_{\text{max}} = \omega A, \omega^2 = \frac{k}{m}.$

Отсюда $\alpha = 4.$

2. 1) $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = k, p_2 V_2 = \nu RT_2, p_1 V_1 = \nu RT_1, \text{ и}$
 $T_2 = k^2 T_1 = 4T_1.$

2) $p_2 V_2 = p_3 V_3, p_1 V_1 = p_4 V_4, \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}, \frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}, \text{ и}$
 $\frac{p_1}{p_3} = 1.$

3) $\nu C_{12}(T_2 - T_1) = \nu \cdot \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \left(\frac{1}{2}p_2 V_2 - \frac{1}{2}p_1 V_1\right) =$
 $= \nu \cdot \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1), \text{ и } C_{12} = 2R.$

3. 1) $I_C(0) = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$

2) $P = U_C I_C = U_R (I_{\mathcal{E}} - I_R), \mathcal{E} = U_R + I_{\mathcal{E}} r, U_R = I_R R;$
 $P = -\frac{R(R+r)}{r} I_R^2 + \frac{R\mathcal{E}}{r} I_R.$ Максимальная мощность будет при $I_R = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2(R+r)}.$ Ток через конденсатор сразу после размыкания

$I_C = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2(R+r)} = \frac{\mathcal{E}}{4R}.$

3) $Q = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}CU_R^2 = \frac{1}{2}C(I_0 R)^2 = \frac{1}{32}C\mathcal{E}^2.$

4. 1) В этом случае $I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_4} = 1 \text{ А}.$

2) Пусть A и B – точки соединения R_1 с R_2 и R_3 с R_4 соответственно. Диод будет открыт при замкнутом ключе, если при разомкнутом ключе $\Phi_A - \Phi_B > U_0,$ т.е. $U_3 - U_1 > U_0.$

Имеем $\frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_4} R_3 - \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} R_1 > U_0, R_1 < 28 \text{ Ом}.$

3) Ток через диод $I_D = \frac{P_D}{U_0} = 1,25 \text{ А}.$ Для нижнего контура $I_3 R_3 + (I_3 + I_D)R_4 = \mathcal{E}, I_3 = 0,75 \text{ А}.$ Для правого верхнего контура $(I_3 + I_D)R_4 - (I_1 - I_D)R_2 + U_0 = 0, I_1 = \frac{5}{3} \text{ А}.$

Для наружного контура $I_1 R_1 + (I_1 - I_D)R_2 = \mathcal{E}, R_1 = 3 \text{ Ом}.$

5. 1) Изображение в зеркале получается на расстоянии $d = \frac{3}{2}F$ от линзы. Изображение в системе – на расстоянии $|f| = \frac{dF}{d + F} = \frac{3}{5}F$ от линзы; оно мнимое.

2) $\text{tg } \alpha = \frac{3F/4}{F} = \frac{3}{4}.$

3) Поперечное увеличение $\Gamma = \frac{|f|}{d} = \frac{2}{5}.$ Скорость изображения в зеркале $2v$. Для скорости u изображения в системе $u \cos \alpha = 2v\Gamma^2.$ Отсюда $u = \frac{2v\Gamma^2}{\cos \alpha} = \frac{2}{5}v.$

	№ журнала	с.		№ журнала	с.
Памяти Г.Л.Коткина		5	Из истории науки		
Памяти Н.Х.Розова		25	Научный вклад мехмата в победу в Великой Отечественной войне		6 14
Статьи по математике		11-12	Математический мир		
Геометрические вероятности.			Вячеслав Викторович Произволов		9 18
<i>Н.Б.Васильев</i>		8	К 80-летию Николая Борисовича Васильева		8 15
Еще раз о графике синуса. <i>Е.Бакаев</i>		4	Математическая «археология»: Задачи первой советской олимпиады школьников по математике. <i>Д.Фомин</i>		7 16
Игры Джона Конвея. <i>В.Клепцын</i>		5	Задачник «Кванта»		
Как выйти из леса? <i>А.Заславский, В.Протасов</i>		9	Задачи М2590–М2633, Ф2597–Ф2640		1–11-12
Калейдоскопы. <i>Э.Винберг</i>		6	Избранные задачи по математике и физике		1 38
Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре. <i>В.Протасов</i>		11-12	Решения задач М2578–М2616, Ф2585–Ф2624		1–11-12
Кривые дракона. <i>Н.Васильев, В.Гутенмахер</i>		1	Бипедальные равновеликости. <i>И.Кушнир</i>		6 25
О стихотворных размерах. <i>Д.Фукс</i>		2	Вокруг правильного пятиугольника. <i>А.Даниярходжаев</i>		5 37
Обманчивая простота простых чисел. <i>М.Королев</i>		3	Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением. <i>А.Зильберман</i>		1 40
Окружности Карлейля, или Как решать квадратные уравнения циркулем и линейкой. <i>К.Кноп</i>		7	Модели, которые мы выбираем. <i>А.Зильберман</i>		2 24
Числовые фризмы. <i>Е.Смирнов</i>		5	Об ортоцентрических четверках, связанных с треугольником. <i>Чан Куанг Хюнг</i>		11-12 21
Чувствительность булевых функций. <i>А.Разборов</i>		10	Шесть перпендикуляров. <i>К.Кноп</i>		9 25
Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения. <i>В.Арнольд</i>		1	«Квант» для младших школьников		
Статьи по физике			Задачи		1–11-12
Архимед и астрофизика. <i>С.Дворянинов, В.Соловьев</i>		9	Избранные задачи		1 46
«Вирус», «маска» – где гарантия? <i>А.Минеев</i>		11-12	Статьи по математике		
Вычисления без вычислений. <i>А.Миздал</i>		1	Обход многоугольника. <i>Е.Бакаев</i>		8 27
Источники электричества. <i>Л.Ашкинази</i>		4	Примеры и контрпримеры. <i>А.Канунников</i>		4 23
Календарь и астрономия. <i>Л.Белопухов</i>		2	Про умножение. <i>А.Савин</i>		1 47
Космические лучи и исследование космоса. <i>А.Урысон</i>		7	Что не так с перестановкой чисел. <i>К.Кохась</i>		6 10
Насос для наливания воды и элементарная физика. <i>С.Парновский</i>		8	Статьи по физике		
Об ово. <i>А.Варламов</i>		6	Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь.... <i>А.Буздин, С.Кротов</i>		1 50
Почему плохо кричать против ветра? <i>Г.Коткин</i>		5	Кювета с водой в поезде. <i>С.Дворянинов</i>		8 36
Пятьдесят восьмая грань бриллианта. <i>Н.Дубровинская</i>		5	Левая, правая – где сторона? <i>С.Дворянинов</i>		3 26
Различные календари. Старый и новый стили. <i>Л.Белопухов</i>		3	Конкурс имени А.П.Савина		
Рассказ о кванте. <i>Я.Сморodinский</i>		1	Задачи		1–4, 9–11-12
Физика, геометрия и красота. <i>А.Варламов, Ж.Виллен, А.Ризамонти</i>		10	Избранные задачи		1 53
Наши интервью			Итоги конкурса 2019/20 учебного года		6 28
Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым		1	Калейдоскоп «Кванта»		
		43	Математика		
			Как проверить число на простоту?		10 32
			Калейдоскоп формул для π		5 «

<i>№ журнала</i>	<i>с.</i>	<i>№ журнала</i>	<i>с.</i>
Физика		Числа харшад. А.Толтыго	
Векторы в физике	4	10	34
Союз физики и математики	3	Лаборатория «Кванта»	
Физика на языке функций и графиков	7	Волны в мелкой тарелке (интерференция).	
Физические парадоксы	11-12	2	34
Экстремумы в физике	8	А.Косоуров	
Школа в «Кванте»		8	44
Математика		Загадочные шары. С.Новиков	
Муравей на консервной банке. И.Акулич	2	1	62
Работа над ошибками. В.Журавлев,		Наши наблюдения	
П.Самовол	5	Как дерево спасает от дождя. Е.Гурович	
Равновеликость от Произволова.		1	12
А.Блинков	9	Своенравный волчок. М.Старшов	
Физика		7	41
Буриданов осел, или Немного		Практикум абитуриента	
о бифуркации. А.Стасенко	2	Математика	
За какое время сливаются капли?		Чертеж в геометрической задаче.	
А.Варламов	1	Г.Дорофеев, Н.Розов	
Лунный тормоз. Л.Асламазов	1	11-12	24
Не чихать: пандемия! А.Стасенко	4	Физика	
Об одном стихотворении А.С.Пушкина.		Попробуем решить иначе. М.Бондаров	
А.Кикоин	1	10	26
Почему обжигает пар? Л.Ашкинази	9	Физические аналогии. С.Козел	
Электродинамический водомет.		2	47
С.Маламанов	6	Олимпиады	
Физический факультатив		Всероссийская олимпиада по физике	
Дышите на здоровье! А.Минеев	4	имени Дж.К.Максвелла	
Капля дождя. Р.Коркин	11-12	5	49
Парадокс Вавилова. В.Фабрикант	1	Европейская математическая олимпиада	
Парадокс Толи Втулкина. С.Дворянинов	5	для девушек	
Пропала энергия. «Коварная»		Заключительный этап XLV Всероссийской	
материальная точка. А.Власов	7	олимпиады школьников по математике	
Течение воды. История, которой 250 лет.		Заключительный этап LIII Всероссийской	
А.Черкун	3	олимпиады школьников по физике	
Трансцендентные уравнения в задачах		LXI Международная математическая	
по физике. Б.Мукушев	8	олимпиада	
Математический кружок		XII Международная олимпиада Romanian	
Вокруг точки на медиане. Д.Проккопенко,		Master of Mathematics	
Д.Швецов	2	6	
Волшебники Джона Конвея. К.Кноп	8	36	
Две задачи о покрытии доски уголками.		XXVI Международная олимпиада	
А.Канунников	11-12	«Туймаада». Физика	
К понятию действительного числа.		2	
Э.Винберг	7	55	
Как дятел Спятел добывал опилки.		LXXXIII Московская математическая	
К.Кохась	6	олимпиада	
Непрерывность дискретная и обычная.		4	
А.Онопrienko	2	45	
Об укладке блинов, котлет и апельсинов.		Московская олимпиада школьников	
С.Дориченко	4	по физике 2020 года	
Прыжки в правильном многоугольнике.		4	
Е.Бакаев	3	47	
		Муниципальный этап LIV Всероссийской	
		олимпиады школьников по физике	
		2	
		52	
		Региональный этап XLVI Всероссийской	
		олимпиады школьников по математике	
		3	
		48	
		Региональный этап LIV Всероссийской	
		олимпиады школьников по физике	
		3	
		50	
		XLI Турнир городов. Задачи весеннего	
		тура	
		4	
		43	
		Экзаменационные материалы	
		ЕГЭ по физике	
		9	
		36	
		Институт криптографии, связи	
		и информатики Академии ФСБ России	
		10	
		41	
		Московский государственный технический	
		университет имени Н.Э.Баумана	
		8	
		55	
		Московский государственный университет	
		имени М.В.Ломоносова. Физика	
		7	
		54	

	№ журнала	с.
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»	7	49
Новосибирский государственный университет	10	46
Олимпиада «Ломоносов». Физика	6	38
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого	8	48
Физико-математическая олимпиада «Физтех»	11-12	41

Информация

Дни физики в Дубне	6	33
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	11-12	48
Заочная школа СУНЦ НГУ	7	44
К 50-летию «Кванта»	1	2
Очередной набор в ВЗМШ	3	41

Нам пишут

Еще раз о муравье на цилиндре. <i>А.Заславский</i>	6	34
Как выглядит график синуса? <i>П.Панов</i>	3	38
Немного о школьной кинематике	2	28
Параллелограмм замечательных точек. <i>К.Козеренко</i>	7	42

«Квант» улыбается

Квант, который построил Исаак. <i>А.Савин</i>	1	3-я с.обл.
Из записной книжки экзаменатора	2	51
Из книги «Математики тоже шутят»	5	39

Вниманию наших читателей 1-11-12**Коллекция головоломок**

Близнецы-братья	9	2-я с.обл.
Бумажные звездочки	2	«
Бумажный волчок	3	«
Головоломка Конвея	5	«
Нестандартные тетрамино	6	«
Параллелепипед сома	7	«
Стабильность	8	«
Субботник в Ханое	4	«
Танграм+Пифагор	11-12	«
Шахматные «кубики сома»	10	«

Шахматная страничка

Год чемпиона	2	3-я с.обл.
Доминанция	10	«
Не забывай про оппозицию	9	«
Плоды машинного просвещения	5	«
Плоды машинного просвещения-2	6	«
Плоды машинного просвещения-3	7	«
Подъем ладьи	8	«
Праздник весны	3	«

	№ журнала	с.
Прерванный турнир	4	«
Суперфинал	11-12	«
Прогулки с физикой		
Алмазная наковальня	5	4-я с.обл.
К вопросу о бифуркации	2	«
Кажется, дождик собирается...	1	«
Как течет вода?	3	«
Коронавирус и «рогатая» мина	11-12	«
Кто круче?	9	«
Куриное яйцо как физический прибор	6	«
Легко ли вам дышится?	4	«
Тайны углерода	10	«
Только ли игрушка	7	«
Экстремальные решения в природе	8	«

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, М.К.Кашин,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР**

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 203296

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74**

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40**

Суперфинал

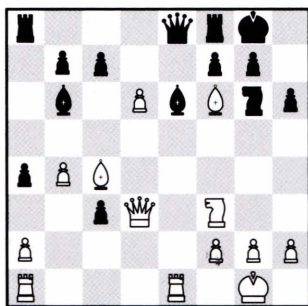
В конце этого сложного года российским любителям шахмат выпала редкая для нынешнего времени возможность понаблюдать за игрой ведущих гроссмейстеров в классические шахматы. В Москве состоялся суперфинал чемпионата России, победителем которого стал Ян Непомнящий (7,5 очков из 11). Второе место занял Сергей Карякин (7), а третье – Владимир Федосеев (6,5). Столько же очков набрал Даниил Дубов, однако по дополнительным показателям остался за чертой призеров. При этом ему удалось в ярком стиле обыграть двух первых призеров, и одну из этих партий мы разберем сегодня.

Д.Дубов – С.Карякин
Москва, 2020

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♕c4 ♗c5 4. c3 ♗f6 5. d4 ed 6. b4!?

Редкая для игры гроссмейстеров попытка оживить классический гамбит. 6... ♗b6 7. e5 ♗e4 8. ♗d5! Практически на любой другой ход белых черные ответят 8... d5, выравнивая игру. 8... ♗c3 9. ♗c3 dc 10. ♗g5 ♗e7 11. 0-0 h6 12. ♗h4 0-0 13. ♗e1 ♗e8 14. ♗b3 a5? Первая серьезная ошибка, и практически сразу фатальная. Особенность таких позиций в том, что у играющего без дебютной подготовки очень мало шансов. Сработала задумка на шестом ходу. Необходимо было 14... ♗f5. 15. ♗f6! (освобождая поле h4 для коня) a4 16. ♗c4 ♗g6 17. ♗d3 d5 18. ed ♗e6.

19. ♗g6! (19. ♗e6 не годится из-за 19... ♗f4! 20. ♗c3 fe 21. ♗g7 ♗g6, и белые жертвуют ферзя!) 19... fg 20. ♗e6 ♗f7? Проигрывает сразу. Единственный шанс черных заключался в переходе в эндшпиль без пешки –



20... ♗c6! 21. ♗e7+ ♗c4 22. ♗g7+ ♗h8 23. ♗c7+ ♗f6 24. ♗c4 ♗d6 25. ♗c3. 21. ♗c3 ♗h8 22. ♗e4 ♗f5 23. ♗e7 ♗g8 24. ♗g8 ♗g8 25. dc ♗c2 26. ♗e5! Черные полностью связаны. Они могут лишь забрать пешку на f2 и ждать, пока белые активизируют коня и ферзевую ладью. 26... ♗f2+ 27. ♗h1 ♗b6 28. h3 ♗h7 29. ♗e1 a3 30. ♗h2 g5 31. ♗d4 ♗c4 32. ♗f5 ♗b4 33. ♗c1 ♗g6 34. ♗g7+ ♗f5 35. ♗g8 ♗c7 36. ♗c7 ♗b2 37. ♗c5+ ♗e4 38. ♗d8, и ввиду потери ферзя или мата черные сдались.

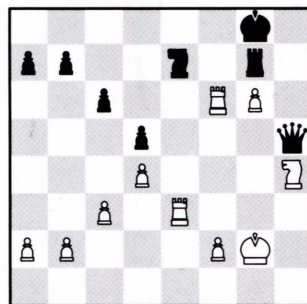
Не безошибочную, но очень яркую партию подарили зрителям Никита Витюгов и Андрей Есипенко.

Н.Витюгов – А.Есипенко
Москва, 2020

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗f6 3. ♗e5 d6 4. ♘f3 ♗e4 5. ♗d3 d5 6. ♗e2 ♗e7 7. 0-0 ♗d6 (это сильнее, чем ♗f6, поскольку помогает черным выгодно разменять белопольного слона) 8. ♗d1 ♗d8 9. ♗e1+ ♗e7 10. c3 0-0 11. ♗c2 c6 12. d4 ♗f5 13. ♗f4 ♗c2 14. ♗c2 ♗a6 15. ♗bd2 ♗c7 16. h4! Типичный для современных шахмат прием, возможный благодаря небольшому преимуществу в развитии. 16... g6 17. h5 ♗f5 18. ♗e5 ♗d6 19. ♗df3 f6 20. hg!?

Возможно, 20. ♗d3 с дальнейшим переводом коня на c5 лучше, но эта жертва заметно оживляет позицию.

20... fe 21. gh+ ♗g7?! Странный ход, видимо, связанный с просчетом. Большинство шахматистов в подобной позиции на автомате спрятали бы короля в угол. 22. ♗e5! Видимо, черные на предыдущем ходу не учли, что пешку можно взять именно ладьей, сохраняя легкие фигуры для атаки. 22... ♗e6 23. ♗e6 ♗f4 24. g3 ♗d7 25. ♗ae1 ♗d6 26. g4 ♗e7 27. ♗d2 ♗h8 28. ♗h4 ♗f7 29. ♗g5 ♗g7 30. ♗f6 ♗h7 31. g5? К этому моменту оба соперника находились в цейтноте, и белые, скорее всего, испугались брать слона из-за шаха, хотя после 31. ♗d6 ♗g4+ 32. ♗f1 их королю нет прямых угроз. 31... ♗d8 32. ♗1e3 ♗g8. Двумя последними ходами черные наладили взаимодействие фигур, и белые идут на жертву ферзя. 33. g6 ♗f8 34. ♗d6 (34. ♗g5? ♗f4) ♗g4+ 35. ♗f1 ♗d1+ 36. ♗g2 ♗f6 37. ♗f6 ♗h5.



38. ♗d6! Белые фигуры лучше скоординированы, что определяет итоговое равенство. Чтобы избежать мата, король вынужден уйти на линию h, но там ему будет создавать угрозы другая ладья. 38... ♗h8 39. ♗h3 ♗g4+ 40. ♗h2 ♗f4+ 41. ♗h1 ♗g4 42. ♗h2 ♗d1+ (черные не могут уклониться от повторения ходов: 42... ♗c8 43. ♗f5 ♗g8 44. ♗g7 ♗g7 45. ♗h7+) 43. ♗g2 ♗g4+, ничья.

А. Русанов

Индекс 90964

Коронавирус и «рогатая» мина

Что их объединяет и как от них защититься?

Прогнозы с физикой

ISSN 0130-2221 20011
9 770130 222207

(Подробнее – на с. 2 ВРУТРИ ЖУРНАЛА)